ＩＣＴ機器を補助とし具体物に重きをおいた実践研究

～具体物ならではの良さを生徒たちに～

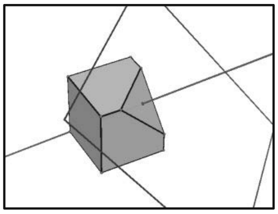
神奈川県立城郷高等学校(再任用)　石谷　優行

１．研究の目的

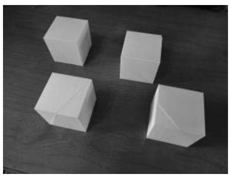
今回の埼玉大会では，発表を２つおこなうことにしているが，この発表は，より具体物を授業に持ち込んでみようというものである．筆者の「こだわり」については，ひとつめの発表のページをぜひお読みいただきたい．

２．授業場面その１　立体の切断面

数学Ｂの空間図形のところで，立体図形の切断面(中学１年生の内容)について思い出してもらった．まず黒板とチョークのみでの解説．次にコンピュータ画面でいろいろ動かしての考察．



そして「３Ｄプリンター」で作ってもらった「立方体の断面模型」でいろいろと考察してもらった．




３．授業場面その２　数列の和

やはり同じ数学Ｂであるが，今回は数列のところである．ここのところ，先生方はいかに授業されているだろうか．

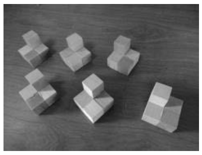
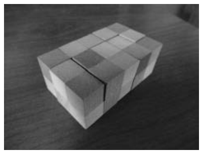
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

まず私は分子に着目させ，ちょうど数学 II で学んでいる「これって３次関数だよね．」として

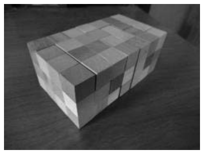
$$f(x) = x(x+1)(2x+1)$$

についてのグラフをコンピュータで表示させたりしての考察もおもしろいかと思う．

そしてシグマの話に戻るが，具体物として

 → 

「１＋４」の６個が「２×３×５」の直方体に

 → 

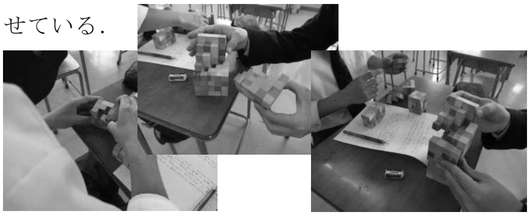
「1+4+9」の６個が「３×４×７」の直方体に

紙面の都合で写真を省略するが，

「1+4+9+16」の物も作成し触れてもらった．

「1+4+9+16」の６個が「４×５×９」の直方体に

自作のこれらの模型を生徒たちに触らせ考察させている．



４．授業場面その３　空間ベクトルの平行六面体

ここも写真を省略するが，$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$を触れて実感してもらうための具体物である．

５．おわりに(「具体物」の有用性)

発表当日は生徒たちが書いてくれた感動的な感想などから，先生方のご意見をいただきたい．

拙ホームページ https://www.ishitani.com/

ＩＣＴ機器を補助とし具体物に重きをおいた実践研究

～具体物ならではの良さを生徒たちに～

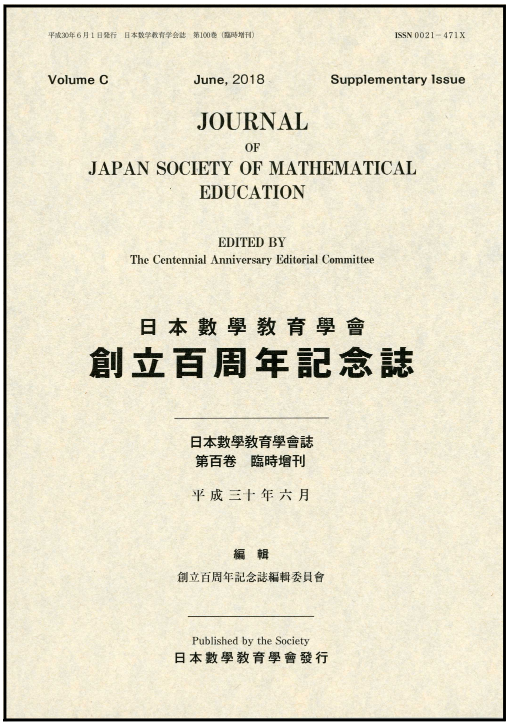
神奈川県立城郷高等学校(再任用)　石谷優行
(過去の実践は定年退職前の神奈川県立横浜平沼高等学校にて)

０．発表のコンセプト

> 先生方，いつもの数学の授業からちょっとだけ脱却し，おおいに「数学的活動」を取り入れ，生徒たちに，数学そのものの持つ「面白さ」「美しさ」「不思議さ」を味わわせてみませんか.

▲これは，長年に渡って私の発表コンセプトとしているものである.

１．具体物に関しては、日本數學教育學會の「創立百周年記念誌」にも書かせていただきました



Ｐ．１５→

Journal of Japan Society of Mathematical

高校数学，デジタルに加えアナログ「具体物」を‼

石 谷 優 行

「高等学校の授業における『知的活動の教具』としてのコンピュータ活用に関する研究～質的研究法によるエスノグラフィー的分析～」という修士論文を書いて早20年となる．当時コンピュータはまだ珍しく，数学の授業に用いるということだけで同じ数学科のみならず他教科からも興味を持って見られたりした．そのPC活用授業における生徒たちの反応は素晴らしく，数学的活動が自然と取り入れられ，数学の持つ「面白さ・美しさ・不思議さ」をおおいに味わってもらってきた．さてここで，それらを別の角度からさらに推進させるものとして，デジタルに加えアナログの「具体物」を用いた授業を提唱する．ICT機器で表示される「画面」の具体物を用意し，実際に手で触れてもらうことで，それまでに無いさらに活き活きとした生徒たちの表情が現れる．さらには，いわゆるバーチャルである「画面」の持つ意味が具体物を通して「なるほど，そういうことなのか．」との感覚が彼らの心の中に残り，その意味をも考える思考にもなる．ぜひとも一度，実践を‼

（神奈川県立横浜平沼高等学校）

２．今回の実践紹介

以下、「こちら」となっているところは、過去の「当日配付資料」へのリンクです。
他の年度のものは、「www.ishitani.com」を開いて「夏の「日本数学教育学会全国大会」などで配付しました当日配付資料など、もろもろは、こちらです。」のところにあります。ご覧ください。

＜その１＞立体の切断面

「２０１５年度日本数学教育学会全国大会[2015(H27).8.7(金)]　北海道大会の時は、こちら。(PDF 2,127KB)」しかしこれは、具体物はなく、PCを触ったのみの感想。**この8ページ目です。**

２０２１年度の実践にて

◆具体物に触れた瞬間の生徒の感想

・完成されたものに触れ、自身の手で自由な角度から実際の断面を眺めることで口頭では伝えられなかった情報を簡潔に理解できる。

・とにかく形が美しいと感じる。手で触わり、いろいろと回してみたりして確認できた。各辺のちょうど真ん中で切ったときに、ほんとうに断面が「正六角形」になり、また、全く同じ二つの物体ができたことを目と手で確認できた。すごい！！

◆具体物に触れたあと、ＰＣを操作しての生徒の感想

・実際の物は４つの断面しかないが、これを見て理解した上で、ＰＣではさらにそれ以外の様々な条件における立体の状態を自身で探求することができ、図形について今まで以上に理解を深められる。

・ＰＣのとき、いろいろな角度かせ見ていたが、本当なの？という気持ちもあった。そのあと実際の物に触れて「なるほど」という感じが強くした。再度ＰＣをさわると、その「なるほど」の感じのままＰＣを触れて、「むずむず」が解消した感じ。

＜その２＞数列の和

２０２１年度の実践にて

◆具体物を組み立ててみての生徒の感想

・Σｋにしても、Σk^2にしても最初はただ与えられた問題を解くための公式にすぎず、おもしろみをあまり感じずにいた。そして今日、初めてこの６つのブロックに触れてみて、それがひとつの直方体のかたまりになることを知った。そして、直方体の体積を求める公式が、まさにΣk^2の公式の分子の形になっている！！これは、おもしろさを通り越して感動しました。６つのブロックがまさに穴ひとつ無いキレイな直方体になっているのは、ほんとうにスゴイと思った。これで分母の「６」は、絶対に忘れない！！
手でさわったり、いろいろな角度から見たりすると数学が嫌いな人でも好きな人でも、不思議な気持ちが解消でき、いろいろな図形をもっと触ってみたくなるんじゃないかと思う。

・問題を解くだけの授業では、ただ数列の和を求めるという印象だったが、今日の授業は実際のものを何らかの形に表すことができ、それがΣk^2の式になっていて、思わぬ発見があるのだと感じた。こんなデコボコした図形で直方体ができるとは全く考えられなかったが、確かに実際に式を見るとそうなっいる。あまりにも信じがたい！！しかし、そうなっている！！びっくり！！面白い話をありがとうございました。

＜その３＞空間ベクトルの平行六面体

◆段ボールによる製作

「２０１１年度日本数学教育学会全国大会[2011(H23).8.2(火)]　神奈川大会の時は、こちら。
(PDF 1,916KB)」　**この6ページ目です。**

◆竹ひごによる製作

「２０１３年度日本数学教育学会全国大会[2013(H25).8.4(日)]　山梨大会の時は、こちら。
(PDF 1,154KB)」　**この5ページ目です。**

２０２１年度の実践は、残念ながら竹ひごで作った物を生徒たちに見せただけとなってしまった。

＜その４＞空間ベクトルに入る前の空間の認識

「２０１４年度日本数学教育学会全国大会[2014(H26).8.1(金)]　鳥取大会の時は、こちら。
(PDF 1,605KB)」

こちらも、２０２１年度の実践は、残念ながら満足のいくものではなかった。

＜その５＞生徒からの質問に、具体物を示しただけで、すぐに納得してくれた例

◆問題「正四面体ＯＡＢＣがある．Ｏ(0,0,0)とＡ(4,0,0)として辺ＢＣがｘｙ平面(x>0,y>0)と垂直に交わっているとき，点Ｂ，点Ｃの座標を求めよ．」

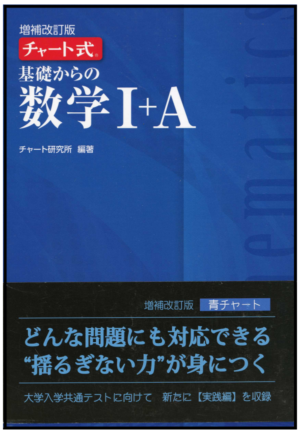
「２０１４年度日本数学教育学会全国大会[2014(H26).8.1(金)]　鳥取大会の時は、こちら。
(PDF 1,605KB)」　**一番最後の「おまけ!!」ページです。**

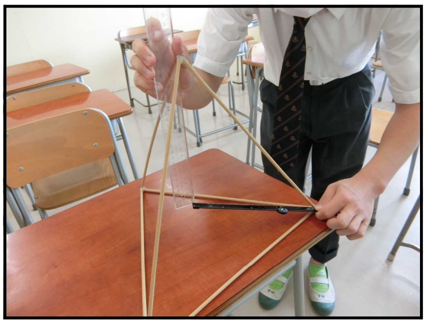
「２０１３年度日本数学教育学会全国大会[2013(H25).8.4(日)]　山梨大会の時は、こちら。
(PDF 1,154KB)」　**一番最後の「おまけ!!」ページです。**

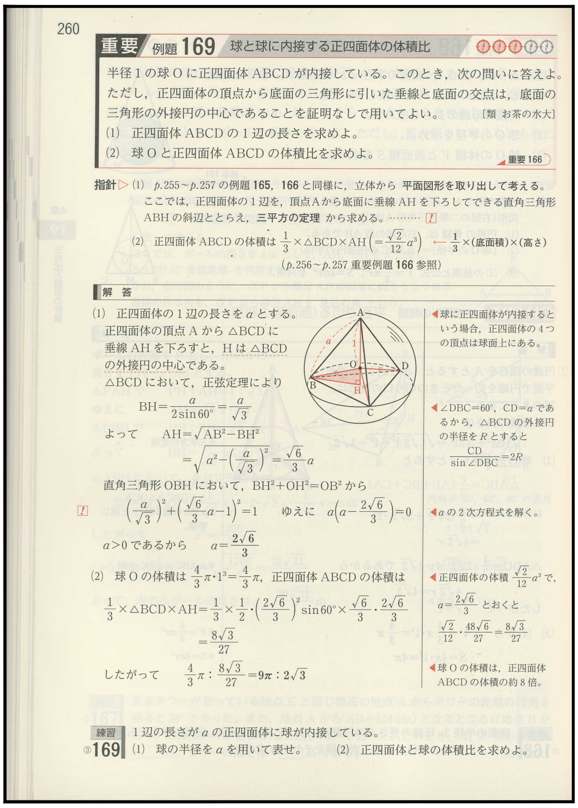
(◆上記ふたつ、同じ内容です。)

＜その６＞入試問題の解説をした際の具体物による確認

２０２１年度の実践にて







260

重要 例題 169　球と球に内接する正四面体の体積比

半径1の球Oに正四面体ABCDが内接している。このとき，次の問いに答えよ。ただし，正四面体の頂点から底面の三角形に引いた垂線と底面の交点は，底面の三角形の外接円の中心であることを証明なしで用いてよい。［類 お茶の水大］

(1) 正四面体ABCDの1辺の長さを求めよ。

(2) 球Oと正四面体ABCDの体積比を求めよ。

重要 166

指針▷ (1) $p.255$～$p.257$ の例題 **165**，**166** と同様に，立体から **平面図形を取り出して考える。** ここでは，正四面体の1辺を，頂点Aから底面に垂線AHを下ろしてできる直角三角形ABHの斜辺ととらえ，**三平方の定理** から求める。……!

(2) 正四面体ABCDの体積は $\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times AH\left(=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\right)$ ← $\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)
($p.256$～$p.257$ 重要例題 **166** 参照)

解答

(1) 正四面体の1辺の長さを a とする。
正四面体の頂点Aから△BCDに垂線AHを下ろすと，Hは△BCDの外接円の中心である。
△BCDにおいて，正弦定理により

$$BH=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

よって　$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}$
$$=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

直角三角形OBHにおいて，$BH^2+OH^2=OB^2$ から

! $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-1\right)^2=1$　ゆえに　$a\left(a-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=0$

$a>0$ であるから　$a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(2) 球Oの体積は $\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$，正四面体ABCDの体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times AH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2\sin 60^\circ\times\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{27}$$

したがって　$\frac{4}{3}\pi:\frac{8\sqrt{3}}{27}=\mathbf{9\pi:2\sqrt{3}}$

◀球に正四面体が内接するという場合，正四面体の4つの頂点は球面上にある。

◀∠DBC＝60°，CD＝a であるから，△BCDの外接円の半径を R とすると $\frac{CD}{\sin\angle DBC}=2R$

◀a の2次方程式を解く。

◀正四面体の体積 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ で，$a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ とおくと $\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{48\sqrt{6}}{27}=\frac{8\sqrt{3}}{27}$

◀球Oの体積は，正四面体ABCDの体積の約8倍。

練習 ③169 1辺の長さが a の正四面体に球が内接している。
(1) 球の半径を a を用いて表せ。　(2) 正四面体と球の体積比を求めよ。

＜その６＞で、球の半径と正四面体の一辺の長さの比を計測した生徒の感想

ルートがついたままの答を出して終わりで無く、実際にそれを確かめられたということは、あたりまえだけど「ほんとうにそうなっている」ことの確認ができたことじゃないですか。「ほんとにあっているんだな。この長さなんだな」という感じ。すごい楽しい。ルートは無限に続く小数だけど、それを少し身近に感じられた感じ。

「当日配付資料」、以上です。石谷