数学Ａ証明指導にパワーポイントを用いる実践研究

～アニメ機能を用いて証明の流れの意味を鮮明に～

神奈川県立横浜平沼高等学校　石谷優行

０．発表のコンセプト

先生方，いつもの数学の授業からちょっとだけ脱却し，おおいに「数学的活動」を取り入れ，生徒たちに，数学そのものの持つ「面白さ」「美しさ」「不思議さ」を味わわせてみませんか．

１．これまでの発表

自身，1999年秋田大会からであるが最近の物として

2011年は地元神奈川にて，「コンピュータ等(iPad, iPod touchも含め)を活用した図形領域授業の実践～数学Ｂベクトルや，数学Ａ平面図形に焦点をあてて～」

2012年は福岡大会にて，「コンピュータ等(iPad, iPod touchも含め)を活用した図形領域授業の実践～平面図形やベクトルに「おりがみ」を導入して～」

2013年は山梨大会にて，「コンピュータ等を活用した図形領域授業の実践～平面図形やベクトルに「折り紙」を導入して～」

2014年は鳥取大会にて，「ＩＣＴだけでなくアナログ要素を加えた実践～「具体物」を加えることでＩＣＴ活用の意味を鮮明に～」

2015年は北海道大会にて，「図形領域のＩＣＴ活用授業にアナログ要素を加えて～「具体物」を加えることでＩＣＴ活用の意味を鮮明に～」

2016年は岐阜大会にて，「ＩＣＴ活用と具体物によるアクティブ・ラーニングに関する研究～図形領域に焦点を当てＩＣＴ活用の意味を鮮明に～」

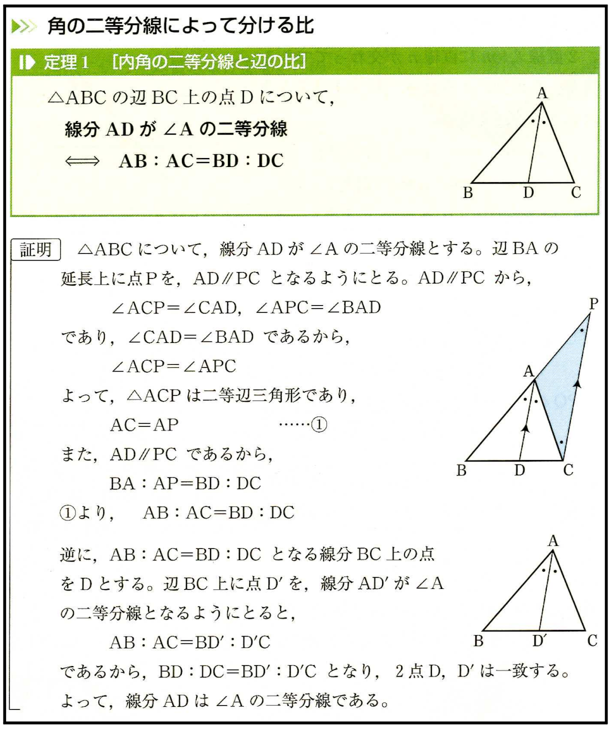
2017年は和歌山大会にて，「ＩＣＴ活用と具体物によるアクティブ・ラーニングに関する実践研究～図形領域に焦点を当てＩＣＴ活用の意味を鮮明に～」と，ここ何年か，図形領域に関した実践発表を連続して行っている．(和歌山大会は自身の腰痛のため発表断念)

(これまでの「当日配付資料」は「http://www.ishitani.com/」のトップページからたどってください．全て読むことができます．)

２．研究の目的と方法

附属高とかではない一般校において，証明の分野を苦手とする生徒は多い．さらに証明があることで，図形領域そのものが苦手であるとする生徒も少なくないのが現状である．本研究は，高等学校図形領域授業，特に「証明指導」に関してパワーポイントのアニメーション機能を用いての実践を通して，生徒たちにとって証明の流れの意味が鮮明になったかどうかを，彼らの声や感想，そして授業観察などから，明らかにしていくものである．

３．最初に出てくる角の二等分線の教材


角の二等分線によって分ける比

定理１　[内角の二等分線と辺の比]

△ABC の辺 BC 上の点 D について，

線分 AD が ∠A の二等分線

⟺　AB : AC＝BD : DC

証明　△ABC について，線分 AD が ∠A の二等分線とする。辺 BA の延長上に点Pを，AD∥PC となるようにとる。AD∥PC から，

∠ACP＝∠CAD，∠APC＝∠BAD

であり，∠CAD＝∠BAD であるから，

∠ACP＝∠APC

よって，△ACP は二等辺三角形であり，

AC＝AP　……①

また，AD∥PC であるから，

BA : AP＝BD : DC

①より，　AB : AC＝BD : DC

逆に，AB : AC＝BD : DC となる線分 BC 上の点を D とする。辺 BC 上に点 D′ を，線分 AD′ が ∠A の二等分線となるようにとると，

AB : AC＝BD′ : D′C

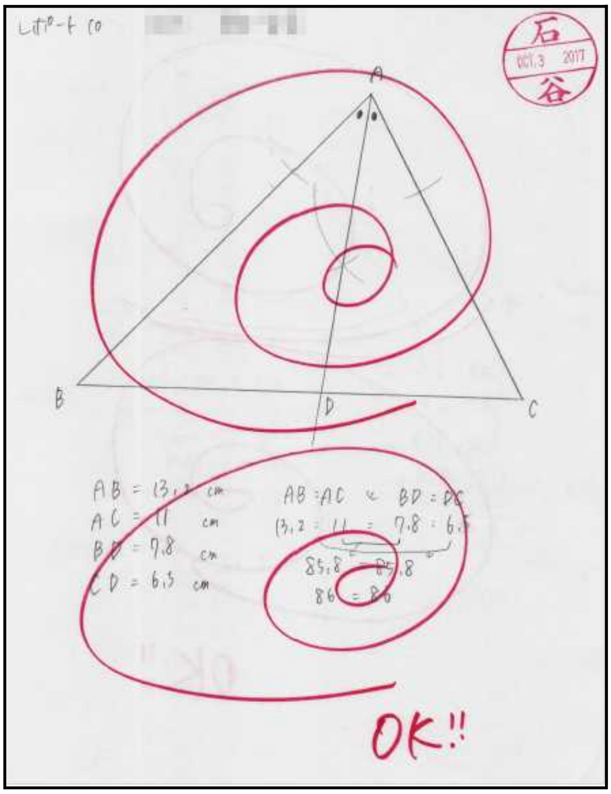
であるから，BD : DC＝BD′ : D′C となり，２点 D，D′ は一致する。

よって，線分 AD は ∠A の二等分線である。

▲図１　啓林館　詳説　数学Ａ－改訂版－　P.114

３－１．「作図」をさせる大切さ

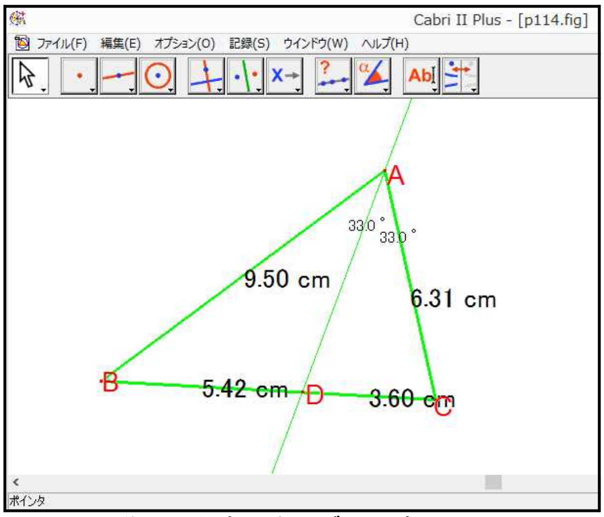
あまり難しくない内容ではあるが筆者は「作図」を重要視した授業を展開している．そこで，この内容で全員に作図をさせ，比を計算させてみた．



▲図２　実際に作図して長さを計測し，比を計算

ここで生徒たちは，「ほんとうにそうなる」ことを実感していた．通常ここのところは，証明を板書するのみで，なかなか実際に描かせる時間がとれないのではないだろうか．しかし実際にやらせてみると大きく数値が違っていた場合は，本人の「計測ミス」に気付いたりする．例えば２．５センチなのに３．５センチと記入してしまうと積の数値が大きく違って出てきたりする．積を求めてから生徒自身の「計測ミス」に気付くということは価値あることではないかと考える．また生徒たちの中には，比の数値を完全に同じくさせるべく，「もう一回描くぞ！！」という生徒も現れる．まさに，４０人，別々の数値であるにも関わらず，上図のＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣが一致するということで生徒たち、実感を伴ってこのことが記憶されていったと考える．「作図」はほんとうに大切であると感じる．

３－２．さらにそれをカブリで確認

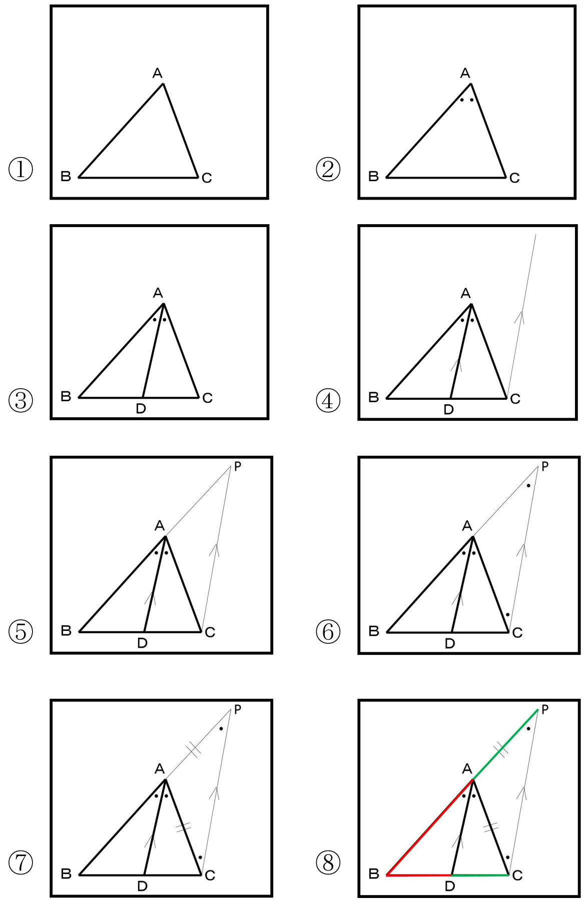


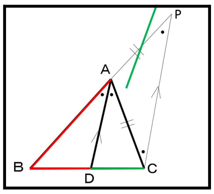
▲図３　作図したものをカブリで確認

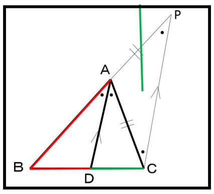
これは時間がなく，生徒全員に操作させずに教材提示の形をとった．カブリを使って作図し，点Ａ，Ｂ，Ｃをどのように動かしても，ＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣが一致する形になるわけであるが，こちらはさらに正確に出てくることに驚いていた．（カブリを見せたのが初めてということもある．）

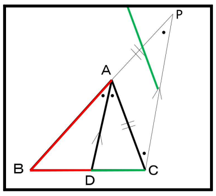
３－３．そして証明を

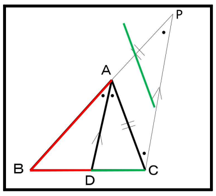
まず黒板に証明を板書したあと，パワポファイル(アニメーション)を用いて，黒板との確認をさせた．

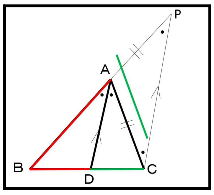


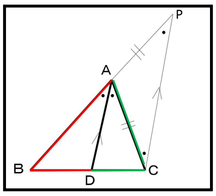
⑨


⑩


⑪


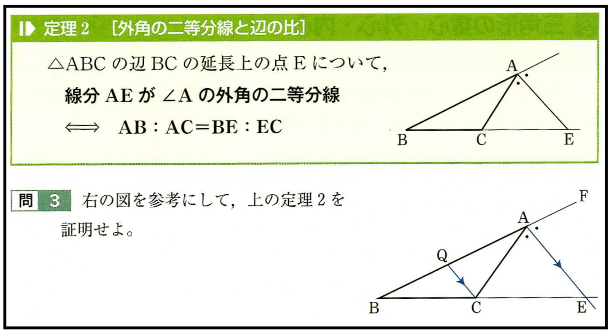
⑫


⑬


⑭


今現在，紙(ペーパー)でこれを見ている皆様は，ぜひとも「http://www.ishitani.com/」から，たどっていって，本「当日配付資料」を，カラーで見ていただきたいと考える．上図の，ＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＢＣのところがカラー(色分け)になっているからである．

３－４．次に出てくる角の二等分線の教材


定理 2 ［外角の二等分線と辺の比］

△ABC の辺 BC の延長上の点 E について，

線分 AE が ∠A の外角の二等分線

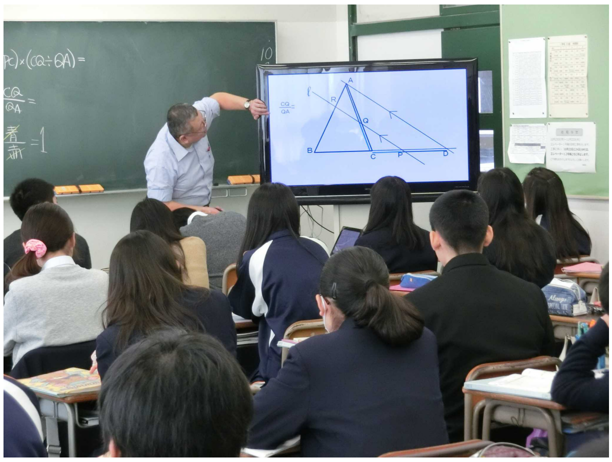
⟺ AB : AC=BE : EC

問 3 右の図を参考にして，上の定理 2 を証明せよ。

▲図４　啓林館　詳説　数学Ａ－改訂版－　P. 115

さて本資料Ｐ．１の図１に続いて出てくるのが，この教材である．ＡＢ：ＡＣ＝ＢＥ：ＥＣということで，外分に関わる内容はどうしても生徒たちが馴染みづらい．しかし，このあと「メネラウスの定理」が待ち構えているかと思うと，どうしても生徒たちには慣れてもらいたい内容となる．これも，生徒たちに手で描かせて長さを測らせ計算させてみた．こちらも，生徒たちから「へぇーほんとうにそうなる！！」という声が聞かれ，うまいこと「証明の必要性」へと話を持って行くことができた．もちろんこのあとカブリで見せたが，ここでは割愛させていただく．

さて，「総会特集号」に載せた写真であるが，そのときの様子が以下のものである．



▲図５　大型ディスプレイに映しているところ

▲図６　板書した証明の，何行目かを画面で確認

この段階での生徒たちの感想であるが，感想を書く時間を充分にとれず短いものになっている．

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

・おもしろい。

・証明をパソコンでやるのを初めて見た。

・ひとつひとつの動きがはっきりしていて見やすい。

・何回も動かせるところがおもしろい。

・証明の順番を逆に表示できるのがすごい。

・黒板での流れがひとつひとつわかった。

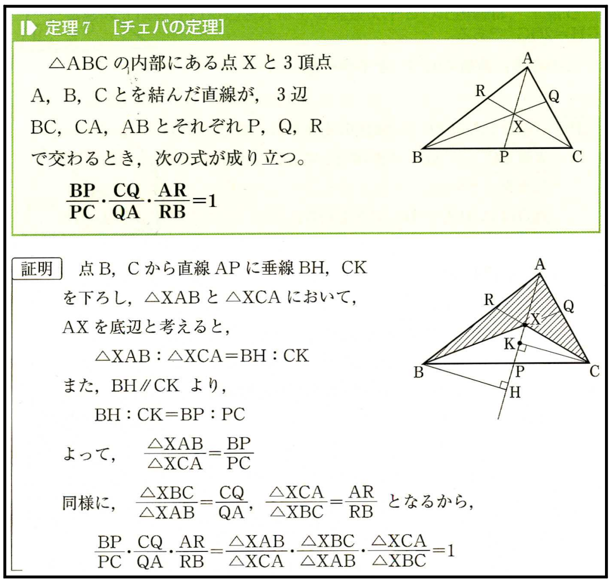
・図が回転して、その位置にうごくのがわかりやすかった。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

４．この教材のあとに

教科書では，この教材のあとに「三角形の五心」を学ぶ順番になっているが，自身の授業では，図形に入るとまず「三角形の五心」を作図，そしてそれぞれの証明を考えてみようということで，その内容は完了している．そこですぐに，チェバ・メネラウスに入れた．

５．チェバの定理・メネラウスの定理


定理 7　［チェバの定理］

△ABC の内部にある点 X と 3 頂点 A，B，C とを結んだ直線が，3 辺 BC，CA，AB とそれぞれ P，Q，R で交わるとき，次の式が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

証明　点 B，C から直線 AP に垂線 BH，CK を下ろし，△XAB と △XCA において，AX を底辺と考えると，

△XAB：△XCA＝BH：CK

また，BH∥CK より，

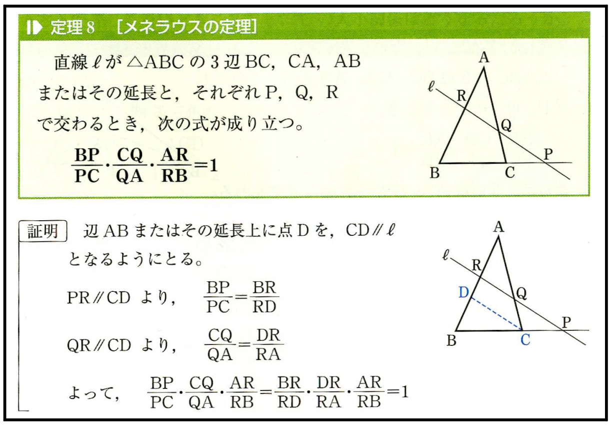
BH：CK＝BP：PC

よって，$\frac{\triangle XAB}{\triangle XCA}=\frac{BP}{PC}$

同様に，$\frac{\triangle XBC}{\triangle XAB}=\frac{CQ}{QA}$，$\frac{\triangle XCA}{\triangle XBC}=\frac{AR}{RB}$ となるから，

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle XAB}{\triangle XCA}\cdot\frac{\triangle XBC}{\triangle XAB}\cdot\frac{\triangle XCA}{\triangle XBC}=1$$

▲図７　啓林館　詳説　数学Ａ－改訂版－　P. 122


定理 8　［メネラウスの定理］

直線 ℓ が △ABC の 3 辺 BC，CA，AB またはその延長と，それぞれ P，Q，R で交わるとき，次の式が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

証明　辺 AB またはその延長上に点 D を，CD∥ℓ となるようにとる。

PR∥CD より，$\frac{BP}{PC}=\frac{BR}{RD}$

QR∥CD より，$\frac{CQ}{QA}=\frac{DR}{RA}$

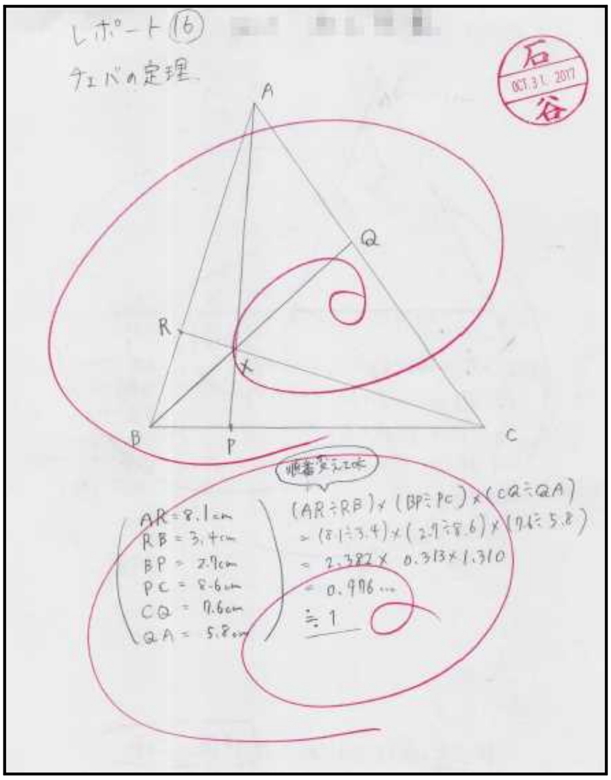
よって，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

▲図８　啓林館　詳説　数学Ａ－改訂版－　P. 123

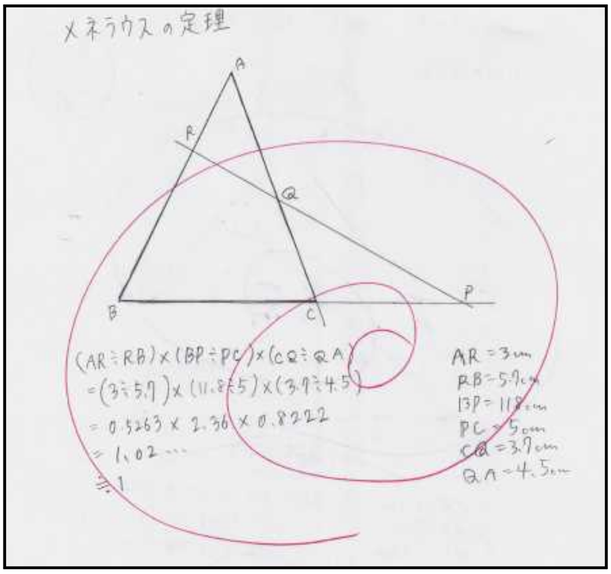
さて，ここで上記のふたつの証明を見てみると，かなりの部分で教師の説明が必要であることに気付く．進学校で教師が証明内容を省いても生徒が自然と補足できてしまうようなところなら別であるが，実際問題，上記のチェバの定理の証明で言えば，「よって」のところの面積比が辺の比になるところまでで我々教師側としては「ひと山あるなぁ」と思ってしまうのではないだろうか．確かにそこまで行けば後半はそうでもないにしても，やはり授業前のイメージとしては「黒板はかなり汚れてしまうだろうなぁ」という実感を持たざるを得ない．また，メネラウスの定理の証明は，以前使っていた別会社の教科書は，補助線の置き方が違うものとなっている．結果，それにより目を付ける三角形の位置も変わってくることになる．様々な見方や考え方により，あたりまえのことではあるが，「解はこの１通りではない」ということをいろいろと説明してあげたいと感じる．

５－１．これも「作図」させる大切さ

こちらももちろん作図させ，辺の長さを計測して計算結果が「１」に近づくかをやってもらった．



▲図９　チェバの定理を作図して計測し計算

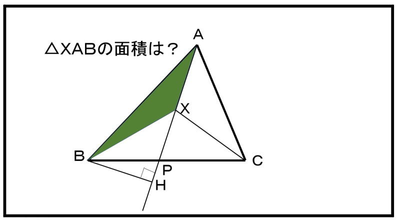


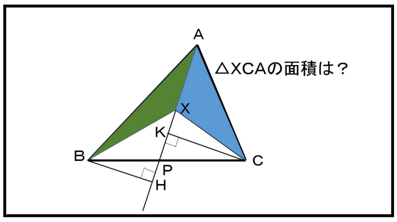
▲図10　メネラウスの定理も同様に（図９と同じ生徒）

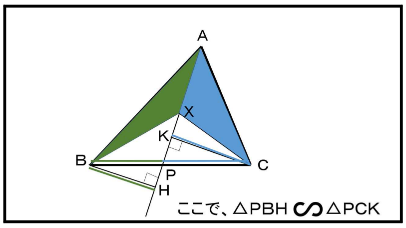
以前の時以上に，この段階において，生徒たちから「へぇーーほんとに１に近い！！」という声が数多く聞かれた．また今回も計算後，数値が「１」と，かけ離れた値になり，生徒自身で「計測ミス」や「計算ミス」に気付く生徒が居た．とても価値あることではないかと考える．このあと，こちらもそれぞれのカブリも見せたがここでは割愛させていただく．

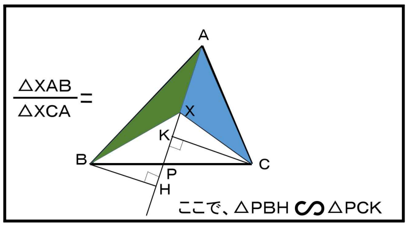
５－２．まずは，チェバの証明を

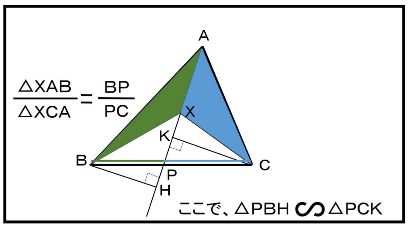
以下，チェバのパワポファイル(アニメ)である．
ぜひ本冊子P.４の図７を見ながら見ていただきたい．
なお，画面コピーは全ｱﾆﾒｰｼｮﾝではなく抜粋である．

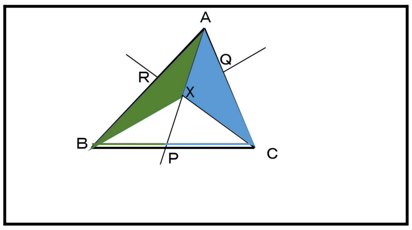


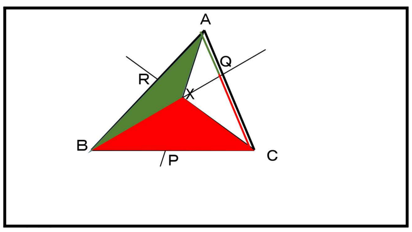




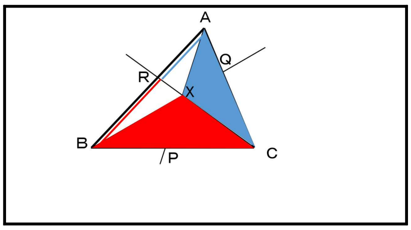


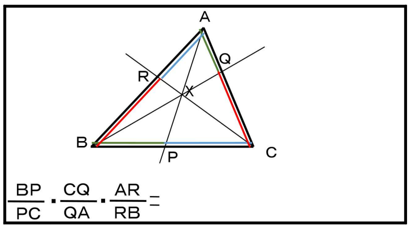


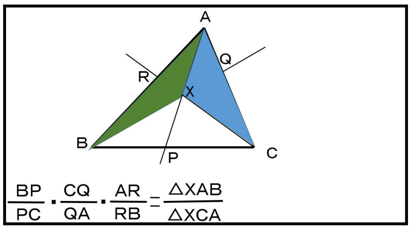


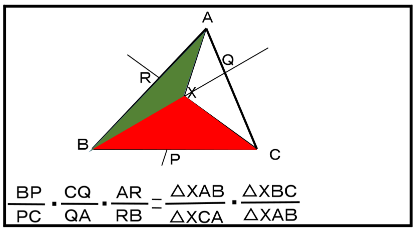


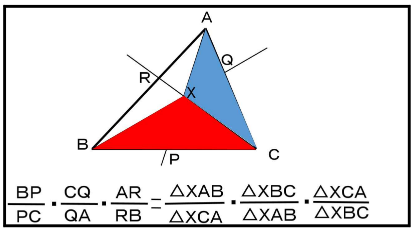
本冊子をペーパーでご覧の皆様　ぜひ拙ホームページでもカラーです

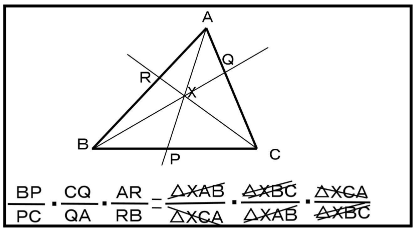


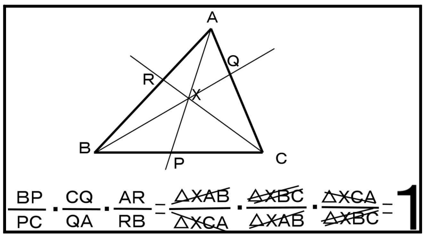


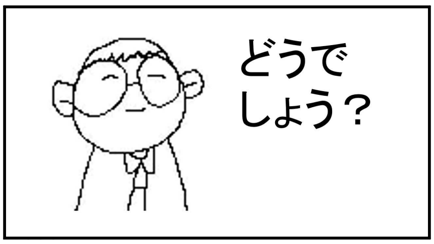






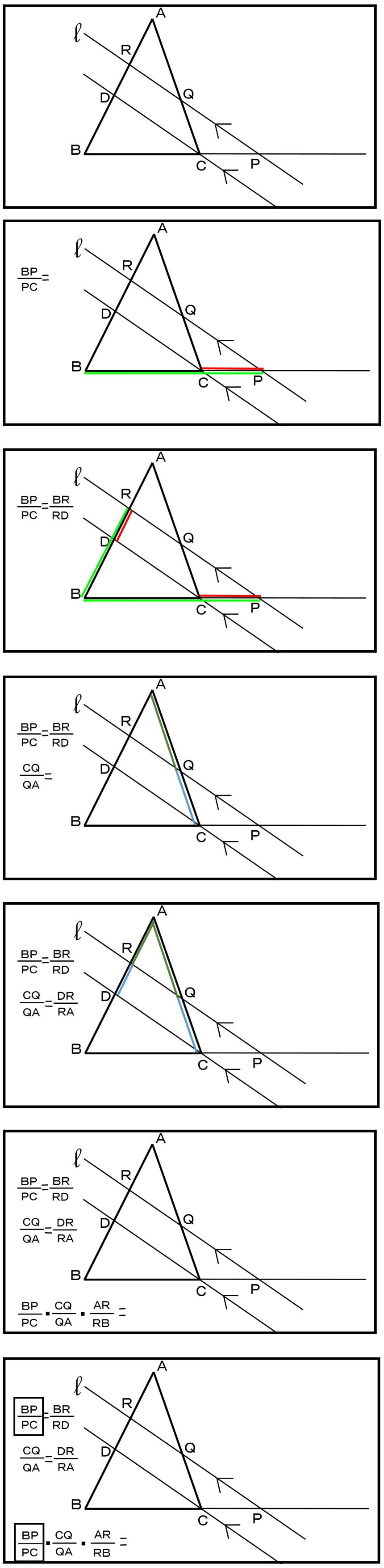




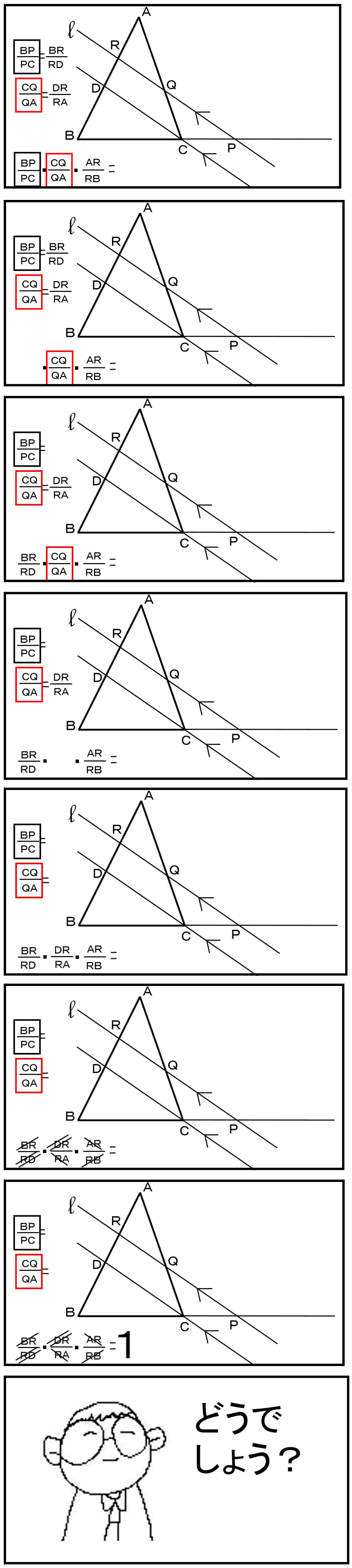


５－３．さらにメネラウスの証明も

そして以下，メネラウスのパワポ(アニメ)である．
ぜひ本冊子P. 4の図８を見ながら見ていただきたい．
こちらも，画面コピーは前ページと同様である．



本冊子をペーパーでご覧の皆様　ぜひ拙ホームページでもカラーです



６．授業中の，すばらしい瞬間

やはりこういう「ちょっと変わった授業」は生徒たちの「食いつき」が良い．しかし「ちょっと変わった授業」と言っても筆者が，こだわっているのは，あくまで「教科書に沿った内容だなぁ」と生徒たちに思わせなければダメであると感じている．もちろん突飛な内容で生徒たちに「さあ，考えてみよう」とやってもよいがあくまで教科書(発展も含め)に帰着するよう持って行かないと「何のための思考だったのか」と生徒たちの心が離れてしまう．そこがとても怖いと感じる．

さて，本冊子のP. 1の最初の証明のところであるが，総会特集号に載せた写真について記したい．

総会特集号の私のページの３枚のうちの右側の下，「▲ｱﾆﾒの動きの意味から，生徒自身が証明を解説．」という写真である．

この前後の写真をぜひお見せしたいのである．

▲図11　写真右の両手をあげている生徒に注目

▲図12　画面で説明がしたくなって出てきてくれた

▲図13　彼が熱心に説明しているところ
（これを「総会特集号」に載せた．）

▲図14　彼の説明に他の生徒たちが
思い思いに確認や説明

図11～図14を見れば一目瞭然であるが，説明をしてくれた彼はまず自分の手を使って画面に映っていることを理解しようとしていたのである．そして本人，合点がいって筆者がさらなる説明を求めたところ，まさに自主的にテレビの前に出てきて説明をしてくれたのである．聞いている生徒たちの後ろ姿も，しっかりと彼の説明を聞いている姿であり，もしかしたら筆者が説明するよりも熱心に聞いている姿がそこにはあった．そして最後の写真はちょっと分かりづらいが，説明者の彼が，さらに説明を補足しているのである．すると聞いている側から「そうか，そういうことなのか．」といった声が聞かれ，聞いている側の生徒たちが「あそこが・・・」と画面を指さして，他者に確認や自分なりの(自分の言葉での)説明をしている様子がうかがえる．まさに「主体的で」「対話的で」「深い」学びが示された「すばらしい瞬間」であった．

７．実施後の生徒たちの感想

・頭で考えるのが苦手な私には想像がしやすくなって，わかりやすかったです.
・メネラウスもチェバもどっちも証明が複雑で難しかったけど，なんとなく「１」になる過程が分かった.
・約分が出てきて１になったときがすっきり！！
・メネラウスさんもチェバさんも，よく思いついたと思う.
・文字だけでなく，面積が色分けされていて，理解しやすかった．ただ計算するだけでなく，なんでそうなるのかを知ることができてよかった.
・このパワポください！！(石谷注：授業後全員へ配付)
・色つきの線や面で動いていたのでとてもわかりやすかったです.
・チェバは面積で，メネラウスは三角形の比で証明できることを知った．約分して１になるのにびっくりしたし，どうしてそうなるのかも理解できた.
・証明の過程を確認できて，どのように定理がなりたつか理解できた．辺の長さを計算して，答をぴったり１にしてみたかった.
・図を描いて計算して１になったときはすごい不思議だったけど，テレビでの解説を聞いたらなんとなくだけどりくつがわかりました.
・きちんと色分けしてあって見やすかった．大まかな根拠は理解できたのでよかった.
・黒板だと，ごちゃごちゃしちゃうところをテレビだとひとつひとつすっきりと出せるので，だいぶわかりやすかった.
・いらない線がなくてとてもみやすかったです.
・今回，いつも以上にわかりやすかった.
・黒板での証明より見やすい．分かりやすい.
・もっと何回も見たいです.
・黒板よりパワポの方が分かり安かったです．理解できました.
・色がついていたのが良かった．わかりやすかった.
・図が動くことによってどの辺とどの辺の比を使うのか，どの三角形を見ればいいのかというのがわかってよかった.
・公式だけじゃ全然わからないけど，石ちゃん(石谷注：筆者のことです)が作ってくださったテレビのを見て「だからこうなるのか」と理解できたので良った.
・昔の人は，このテレビ無しで考えついたのですごい.
・パワポの作成お疲れ様です．分かりやすかったです.
・教科書とちがって，パワーポイントは動くので，どうやってやってるかよくわかった．数字だけでなく，色分けでの分数など，文字でおいてそれを約分して１になるのが理解できて，なぜ１になるか分かった．すごいと思った.
・パワーポイントでの証明の解説は，わかりやすかったです.
・石ちゃん(石谷注：筆者のことです)の作った映像は，わかりやすくまとまっていて教科書のぐちゃぐちゃした数式を見てもよくわからないけど，こっちの方が見やすいなと思いました．ありがとうございます.
・考えたり黒板で説明されるより，テレビを使って実際に見せてもらうことで，すごく理解が深まった.
・図にして見ることで証明が理解できたし良かったと思います．また，分からなくても戻れたりするので良いと思いました.
・教科書で省略されているところを詳しくパワポで説明してくれたので助かりました．説明がいつもよりわかりやすく感じました.

８．考察と今後の課題

生徒たちから有意義な感想を書いてもらってありがたいかぎりである．「証明の流れの意味が鮮明になったかどうか」このやり方であれば鮮明になると言えるのではないだろうか．この方式の大きなメリットとしては，生徒たちも書いているが，画面上での「証明の手順を戻せる.」ことであろう．実際黒板だったらかなり汚れてしまうが，パワポなら画面は汚れない．この差は大きいと言える．さらに前ページにもあるように「主体的で」「対話的で」「深い」学びも実現させることもできるのである.

さて今後の課題はなんといっても「普及」であろう．パワポなのでソフトが無いという心配も無く，製作もそれほど難しくはない，製作にやや時間を要するが，生徒たちのことを考えればそれも楽しいものである．あとは教師側のモチベーションであろう.

９．謝辞

横浜国立大学の複数の院生が年間を通して筆者の授業を見学に来ていて，早６年となります．筆者のカメラを彼らに渡し撮影してもらいました．生き生きとした様子を撮影してもらえたことに感謝申し上げます.