図形領域のＩＣＴ活用授業にアナログ要素を加えて

～「具体物」を加えることでＩＣＴ活用の意味を鮮明に～

神奈川県立横浜平沼高等学校　石谷優行

０．発表のコンセプト

先生方、いつもの数学の授業からちょっとだけ脱却し，おおいに「数学的活動」を取り入れ、生徒たちに、数学そのものの持つ「面白さ」「美しさ」「不思議さ」を味わわせてみませんか。

１．これまでの発表

2009年は京都大会にて，「重心　その面白さ　美しさ～特に凹四角形の具体物(ブーメラン)を用いて～」

2010年は新潟大会にて，「コンピュータ等(iPad,iPod touchも含め)を活用した図形領域授業の実践～数学Ｂベクトルに焦点をあてて～」

2011年は地元神奈川にて，「コンピュータ等(iPad, iPod touchも含め)を活用した図形領域授業の実践～数学Ｂベクトルや，数学Ａ平面図形に焦点をあてて～」

2012年は福岡大会にて，「コンピュータ等(iPad,iPod touchも含め)を活用した図形領域授業の実践～平面図形やベクトルに「おりがみ」を導入して～」

2013年は山梨大会にて，「コンピュータ等を活用した図形領域授業の実践～平面図形やベクトルに「折り紙」を導入して～」

2014年は鳥取大会にて，「ＩＣＴだけでなくアナログ要素を加えた実践～「具体物」を加えることでＩＣＴ活用の意味を鮮明に～」　と，ここ何年か，図形領域に関した発表を連続して行ってきている．

（これまでの「当日配付資料」は
http://www.ishitani.comのトップページから
たどってください．全て読むことができます．）

さて，数学科教員が教科「情報」の担当者となり，数学を充分に持てないケースが多くあるが筆者もそのひとりである．昨年度，筆者は新課程では初となる数学Ａを担当する機会を得た．今回の発表は,その数学Ａでの長期的な実践報告である．

２．実践授業

（1）平成２６年１０月より

ほぼ教科書どおりに授業を進めていったが，本校で使用している教科書の「図形の性質」の章では，「三角形の性質」「円の性質」「作図」そして「空間図形」の順になっている．これは，高等学校学習指導要領解説数学編(2009)「以下，＜数学編＞」で記載されている順番どおりである．筆者は，＜数学編＞での記載もあり，作図に重きを置いた授業展開をした．まず「三角形の性質」で概要を説明したあと，「とにかく描いて確かめてみよう.」を合い言葉に，「内角の２等分線と辺の比」,「外角の２等分線と辺の比」を始めとして，教科書で「定理」として出ているものを，作図の手順で描かせた．そしてそのあと，定規を使って長さを計測し，比が本当にそうなっているのかを確かめた．ここでは，電卓の使用を可とした．生徒たち，自分のスマホの電卓機能を使って計算していた．また，計測したものを計算するので，当然のことながら，比がぴったりと同じ数値にはなり得ない．電卓では，ケタ表示のある分だけ数値は表示してしまう．そこで，有効数字の話をして，どこまでがいっしょなら同じと考えて良いということを教えていった．また，クラスメートどおしノートを覗かせてもらい，計測そのものは自分とは違う数値が出ていても，比は同じになっていることを確認した．あたりまえのこととはいえ，生徒たちはこのことだけでも結構喜んで作業し，納得していた．

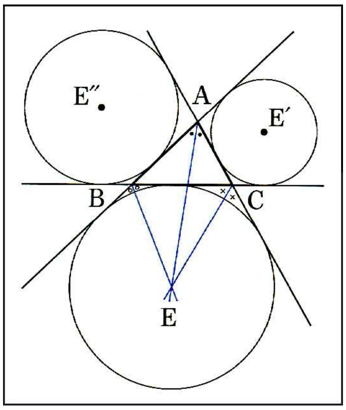
そしてこのあと，その定理の証明を行って演繹的な考えの重要さを認識させた．

尚，前述した「図形の性質」の教科書の配列順であるが，本校の数学科準備室にあった５社，１１冊のものを見てみたが，９冊は本校のものと同じで，作図が３番目に来ている．ただ１冊だけ，作図を最初に持ってきている教科書があり，また１冊だけ，作図を最後

に持ってきている教科書があった．いずれにしても，作図のところは，授業としての扱いにくさ(例えば，定規やコンパスを忘れた生徒が多い場合への対応)もあり，重要と分かってはいても，現場での時間はそれほどかけられていないのが現状ではないだろうか．尚，ある教科書会社の教授資料では，「図形の性質」の扱いは２８時間としているが，作図の単元はわずか２時間であった．

(２)平成２６年１１月１７日(月)＜教室のみ＞

この日から，三角形の五心に入った．説明のあと，これまでやってきたようにまず描いてみようということで，ひとつひとつを生徒たちに描かせた．そして「傍心」に関しては，教科書(数学Ａ　啓林館　307)にもあるように３つとも描かせた．



▲図１　教科書P.136　傍心の図

ここで教科書には載っていない発展的内容として，「△ＥＥ’Ｅ’’の□心と△ＡＢＣの□心は一致する．□には何が入るか.」について考えてもらいこの日の授業はここで終了となった．

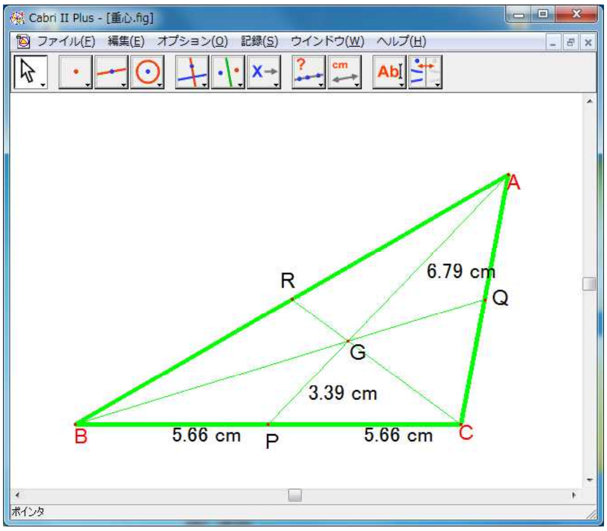
(３)平成２６年１１月２０日(木)＜教室のみ＞

この日は教科書を進め，五心の証明などを行った．

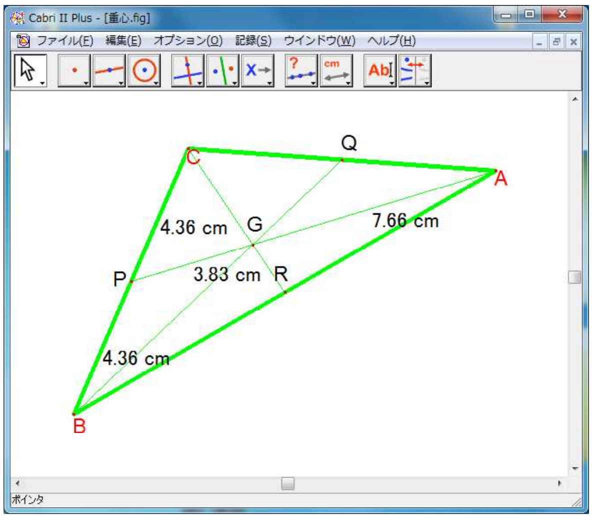
前回の最後に出した問題についてはまだ解説せず，さらに考え続けてもらった．

(４)平成２６年１１月２７日(月)

この日は前半，教室で教科書を進め，後半，ＰＣ教室に移動して前々回の最後に出した問題をコンピュータを用いて考えてもらった．彼らにとっては初めてのコンピュータ操作ということになる．ここで使用したソフトは「CABRI　Ⅱ　Plus」(以下、＜平面カブリ＞)というソフトである．後述する「CABRI 3D」(以下、＜立体カブリ＞)は空間図形に関していろいろと操作できるものであるが＜平面カブリ＞の方は、平面図形に関していろいろと操作できるものである．本来であれば，生徒たちに，ひとつひとつ線分を描くところからこのソフトについて説明をしていきたいところであるが，時間的に，また教員ひとりで生徒３８人ということから断念し，こちらで五心のそれぞれのファイルを作っておいてサーバーから全生徒のクライアント機に配付する形をとった．まず生徒たちに，「重心」のファイルを開かせた．ここで筆者が＜平面カブリ＞での作図を見せた．辺ＢＣの中点が一瞬でとれること．もちろん内部ではあの作図の操作をしていること．そして点Ａと辺ＢＣの中点を結ぶ．他の２本も作図し，重心が決まることを操作で見せた．生徒たちに配付したファイルはこのように作ったものだということを確認させた．そして生徒たちは，三角形ＡＢＣの各点をつまんで(マウスでドラッグして)いろいろと形を変化させた．ここで生徒たちの歓声があがった．彼らが発した言葉に「ひっくりかえっても成り立つ」があった．



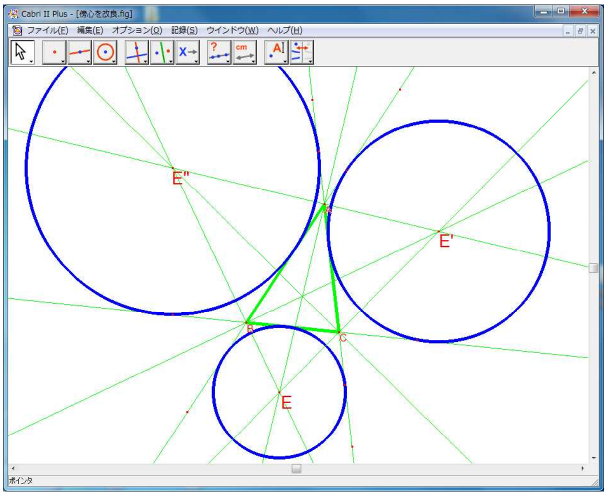
▲図２　重心の説明で用いた「CABRI　Ⅱ　Plus」



▲図３　図２の点Ｃを辺ＡＢを越えて移動

図２・３をご覧いただければ分かるが，定規とコンパスで描いた場合，図２と図３は別々のものとして生徒たちはとらえる．しかし，テクノロジーを用いることで図３は図２を変化させてできたという認識になり，彼らの言葉を借りれば「ひっくりかえった」感覚が，三角形を「裏側から見ているような感覚がする.」と感想に書いた生徒がいた.「裏側から見る」というのはこのあとの空間図形につながる言葉として筆者は強く印象に残った.

そしてこのあと傍心のところで以下のファイルを操作させた.



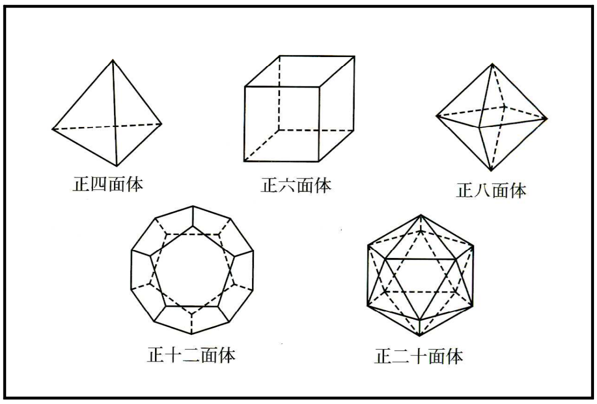
▲図４　三角形を変化させて傍心の動きを観察

前々回のときは，生徒たちはまだ，自分で紙の上に書いた傍心であり，「△ＥＥ'Ｅ''の□心と△ＡＢＣの□心は一致する.」に関してなかなか解答を見つけられずにいた．教師側から「予想を立てて動かしてごらん」と指示を与え，三点Ａ，Ｂ，Ｃをいろいろと動かし最終的に「垂心」と「内心」ということをほぼ全員の生徒たちが見つけられた．そしてこのあと演繹的に考察したあと感想を書いてもらった.「びっくり」や「驚いた」といった感想が多い中，３８名中１１名の記述に「美しい」という言葉が入っていた.

（５）平成２７年１月２６日（月）<教室のみ>

この日の授業の後半から，空間図形の多面体のところに入った．教科書で授業を進めたあと，最後の１０分のところで次のクイズを出してみた.

「次の５つの図形のうち，一辺の長さが同じとすると一番体積が大きくなる（一番大きな形になる）のはどれだと思いますか？その理由は？そして答えに自信はありますか？さらに，過去にこの問題を見聞きしたことがありますか？」を書かせた.



▲図５　教科書P. 175より

教科書では，５つの正多面体が同じ大きさで表示されておりこの図を見て考えるよう指示をした．生徒たちは，いろいろと考えていた.

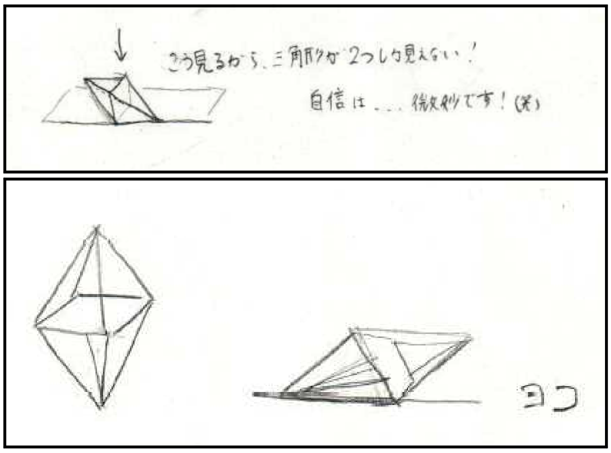
まず「過去にこの問題を見聞きしたことがあるか」については全員が初めてと答えた．そして彼らの解答は，正四面体（０名），正六面体（１名），正八面体（１名）正十二面体（２３名），正二十面体（１３名）であった．理由については「見た目」や「勘」「直感」とする生徒が多い中，正十二面体と答えた生徒たちが以下のような理由を述べていた.

「一つの面が正五角形でできていて一番面積が大きくなりそう.」「球体のように感じる.」「図形の一番上と一番下を結んだ線を考えたとき一番長くなりそう.」「一つの面の正五角形は正三角形５つになり，一番正三角形の数が多くなるから.」「一つの面の辺の数が多い分だけ接する面の数が多くなるから」「（面の数）対（辺の数）を考えると，正四面体が6:4, 正六面体が12:6, 正八面体が12:8，正十二面体が30:12, 正二十面体が30:20で，それぞれ割り算して一番大きいのは正二十面体だから.」これらを答えた生徒たちも，堂々と「自信あり」と書いた生徒はいなかったが，「自信なし」の生徒もいなかった.「自信半分くらい」や「自信１０％」などを書いている生徒ばかりであった.

（６）平成２７年１月２９日（木）

この日の授業は最初からＰＣ教室で行った．しかし，最初はまず教科書P. 175を開いて「同じ大きさに描かれている正多面体５つ」を見てもらい，教科書を閉じさせてから次のクイズ「正八面体の１つの面を下にして水平な台の上に置く．この正八面体を真上から見た図（平面図）を描いてください．その理由は？そして答えに自信はありますか？さらに，過去にこの問題を見聞きしたことがありますか？」をやってもらった.

この問題は2008年度の東京大学(理系)の入試問題のひとつである．もちろんこの段階で生徒たちには入試問題のことは言わない．約１５分後に回収したが，生徒たちは全員初めて見たと回答した．そして，完全な解答の平面図は一人もなかったが，ほぼ全員の生徒が１つの面を下にした状態の立体図を描いてそれをベースに考えていた．

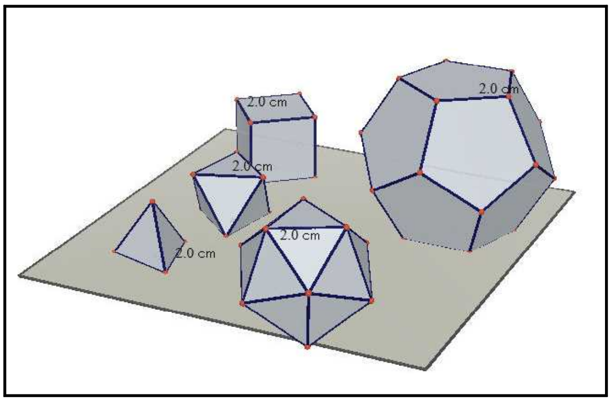


▲図６　生徒たちの考えた過程

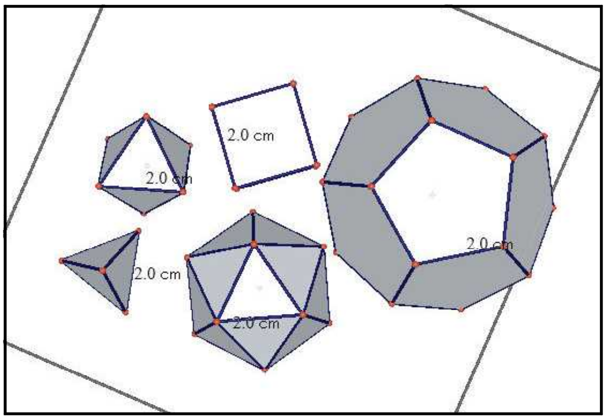
そして最終的な解答は，８割の生徒たちが「ひし形」の図を示していて，皆，自信なしと書いてあった．

このあと，生徒たちに＜立体カブリ＞を初めて触らせた．筆者が正多面体５つを一辺が同じ長さにして作図し，それを開いてもらった．(下記，図７)

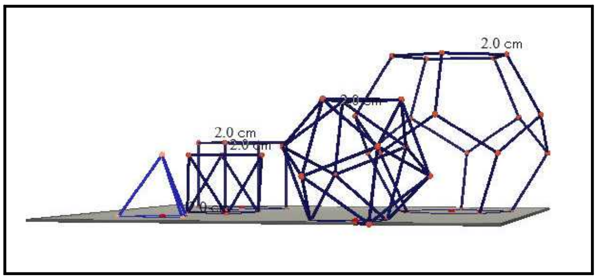
そしてマウスの「右ドラッグ」を使用することで，この図全体を上から見たり，下(底)から見たり左右からも見たりできることを確認した．ここで大きな歓声があがった．「すごいすごい！！」「マジすごい！！」という声にまじって「へぇー」「ああっ」という納得したような声も聞かれた．ここで生徒たちに自由に＜立体カブリ＞を触らせた．生徒たちは、例えば辺のところで右クリックすると，その辺の色や形状を変化させられることを自由操作から知り，さらに面も同様に



▲図７　最初に生徒たちに見せたもの



▲図８　見る角度を調整して真上から見たもの



▲図９　面を透明にしてそれぞれの大きさを実感

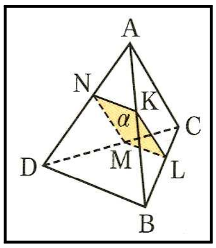
変化させられることを知り，いろいと自由に操作していた．そして見る角度を調節して正多面体の５つの大きさを感じ取っていた．

さらに，正八面体を真上から見た図(平面図)も確認していた．このあと生徒たちに，しばらく授業でこのソフト使い続けることを連絡し，自由に操作してもらった．生徒たちの作業は筆者の想像をはるかに超え，透明にするだけでなく面の色を変えてみたり，カラフルな色にしてみたりと自由に操作していた．また，＜立体カブリ＞の持つ他の機能(例えば展開図の自動作成)などを見つけては，友人に話して歓声をあげていた．

(７－１)平成２７年２月２日(月)の授業の「前半」

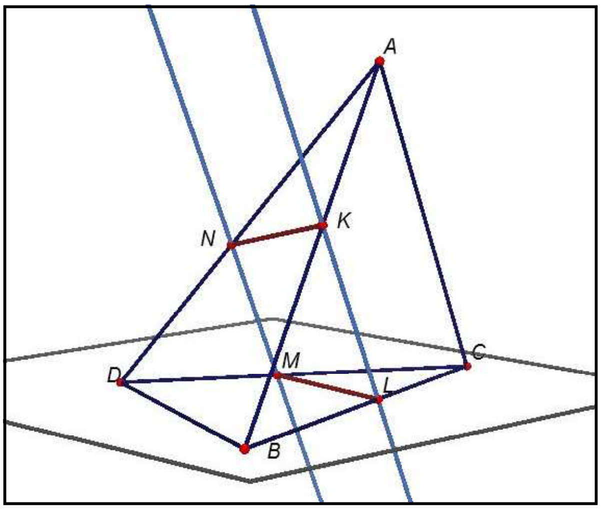
この日の授業も最初からＰＣ教室で行ったが，後半で３～４人のグループを作ってもらうことになることを連絡した．前半で「ＰＣ操作だけによる感想」を書いてもらい，後半，生徒たちに初めて「具体物」としての「ポリドロン」を触ってもらう計画であった．

前回の復習をした後，教科書P. 174の例題６「四面体ＡＢＣＤを直線ＡＣ，ＢＤに平行な平面で切るとき，切り口はどんな図形か.」を解説した．



「ＡＣ∥αからＫＬ∥ＡＣ，ＮＭ∥ＡＣよってＫＬ∥ＮＭ…①　同様にＢＤ∥αから

ＫＮ//ＬＭ…②　①，②より切り口は平行四辺形」という解であるが生徒たちはどうもピンと来ていないようであった．



▲図10　教科書P. 174の例題６を＜立体カブリ＞で

そこでこれを＜立体カブリ＞で作成し，生徒たちに触ってもらった．点Ｋ，Ｌ，Ｍ，Ｎを自由につまんで動かしてもらった．なんといっても特徴的なのはＫＬ//ＡＣの関係から，点Ｋを点Ｂに近づければ連動して点Ｌも点Ｂに近づいて行くことである．ＫＬの長さとＮＭの長さを同じにすることで自然と四角形ＮＭＬＫは平行四辺形になっていく．また，ＮＫをＤＢと平行にしても同様であり，条件の「直線ＡＣ，ＢＤに平行な平面で切る」を＜立体カブリ＞で操作すると，四角形ＮＭＬＫは平行四辺形に「ならざるを得ない」といった感じを生徒たちは実感していた．

以下，ここまでの「ＰＣ操作だけによる授業の感想」をいくつか示す．

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

・教科書と黒板を使った授業だと空間をイメージするのが難しいけど，ＰＣを使うといろいろな角度から簡単に見ることができるのでイメージしやすい．（同様内容多数）

・貴重な体験をさせてもらった．

・図形を色々いじって遊べたのが楽しかった．

・ＰＣだと「こうしたらどうなるか」の実験がでておもしろい．

さらに教科書P. 174の例題６に関しても

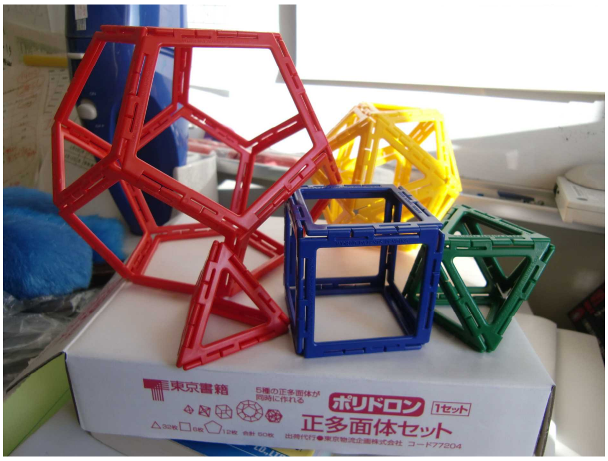
・教科書に図が載っていて少しはイメージが湧いたが図がないときびしい．そしてＰＣで操作してどういうことなのかがようやくわかった．

・いつも平行四辺形になるのか疑っていたけど必ずなるのを実感した．

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

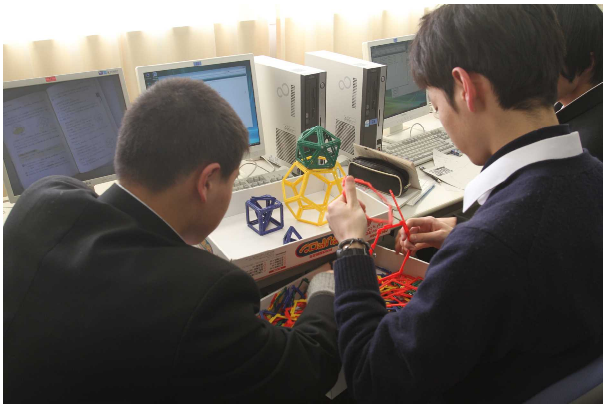
（７－２）平成２７年２月２日（月）の授業の「後半」

「ＰＣ操作だけによる授業の感想」を書いてもらったあと，３～４人でグループを作ってもらい，具体物として「ポリドロン」を配付した．



▲図11　ポリドロン正多面体セット（東京書籍）

上記の写真は正多面体セットであるが，実際に生徒たちに配付したのは，ポリドロンの「標準セット」である．標準セットは正多面体の５つの作成はもちろんのこと，三角形８０ピースを始め全部で２２６ピースある．この標準セットを１３箱用意し，３～４人のグループで１箱とし，自由に作成させた．授業としては残り２０分くらい．ここではあまり数学的なことは言わず，自由にさせた．しかし生徒たちは私に気を遣ってか，まずは正多面体から作りはじめた．



▲図12　ポリドロンで，まず正多面体を作成

ＰＣ教室中が歓声に包まれた．あちらこちらで感激の声があがった．高校生がこんなにも夢中になるのかと思うほど彼らは夢中になって取り組み始めた．やがて彼らから「デカイなぁ」とか「こんなに大きい！！」という声が聞こえてきた．正十二面体の大きさである．彼らの言い方で「この大きさヤバイ！！」である．ポ

リドロンは一辺の長さが同じである．彼らとしてはＰＣで既に確認はしているものの手で触った実感はまた別のものであった．このあとポリドロンを自由にさわってもらった．以下，「初めてポリドロンに触れての感想」をいくつか示す．

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

・とにかく楽しい(多数)

・見るのと作るのとでは全然違う．

・普通に正十二面体を作っただけだけどとても楽しい．完成すると，とても「がっしり」する．

・教科書に載っていないような図形が作れた．

・適当につなげて図形になるときとならないときがある．正六角形はなぜかならない．

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

（８）平成２７年２月９日（月）の授業

この日の授業も最初からＰＣ教室で行った．３～４人のグループを作ってもらい，ポリドロン標準セットを１箱ずつ配付した．授業は，教科書のオイラーの多面体定理（オイラーの多面体公式）のところである．プリントで，まず平面の「頂点の数－辺の数＋面の数＝１」がどのような場合にも成り立つことを確認したあと，いよいよ立体で「頂点の数－辺の数＋面の数＝２」がどのような立体図形でも成り立つかどうかを確認した．ここでの教科書の「練習問題」は，四面体，立方体，五角柱，四角錐の４つについての確認であった．生徒たちは思い思いの立体図形で成り立つことを確認していた．また友人と「合体」させての確認も行った．すると生徒の中には，「内側に入れてしまう合体」を作り出す生徒もいた．

（９）平成２７年２月１２日（木）の授業

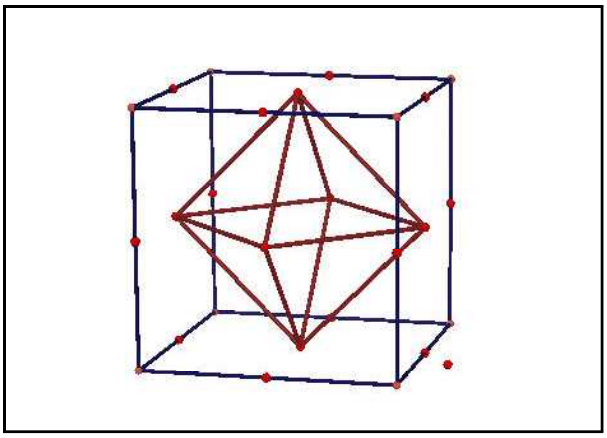
この日の授業もこれまでと同様の形でＰＣ教室で行った．この日の授業は教科書の「正多面体の存在条件」である．「(１)１つの頂点に集まる面の数は３以上．(２)頂点のまわりの多角形の和は３６０度未満．(１)かつ(２)」というものであるが，これを「実感を伴って感じてもらえるかどうか」に焦点を当てた．プリントを使用し，１つの頂点に集まる面を正三角形とし，３つなら正四面体の一部と考えられることをポリドロンで確認した．では４つなら正八面体，５つなら正二十面体，そして６つならと正三角形を６つつなげると生徒たちから「内側に曲げられない」の声があがった．これが「３６０度未満」となっていることを確認した．同様に正方形も３つなら折り曲げようとして立方体の一部になるが４つではそれで３６０度になってしまう．正五角形も同様で，さらに正六角形では(１)の最低条件の３つをつなげただけで３６０度になってしまうことを確認した．

▲図13　「正多面体の存在条件」を確認

（１０）平成２７年２月２３日（月）の授業

この日の授業もこれまでと同様の形で行った．この日は教科書のP.180の問53「正四面体，正六面体の各面の中心を頂点とする立体はどのような立体か調べよ．」のところを扱った．まずＰＣもポリドロンも何も使わずに考えてもらった．生徒たちは「正四面体の面は４つでありそれが点になるのだから４つの点があるのは正四面体，また正六面体の面は６つありそれが点になるのだから６つの天があるのは正八面体」としている者が大多数だった．しかしこれでは点の数しか考えてなく，本当にそうなるのか，オイラーの定理を用いて考えるよう指示した．尚，正四面体からはできあがるのが同じ正四面体のため，ここでは正六面体で説明した．「正六面体からできあがるものは点の数が８であり，できあがる立体の１つの頂点から出る辺の数は元の正六面体の１つの面について隣り合う面の数に等しい．正六面体の面は正方形だから４である．よって，求める立体の辺の数は６×４÷２＝１２となる．オイラーの定理『点－辺＋面＝２』より６－１２＋面＝２なので面の数は８．よって正八面体である．」黒板に図を描いて説明したものの，この説明の中で生徒たちが一番首をかしげていたところが「できあがる立体の１つの頂点から出る辺の数は元の正六面体の１つの面について隣り合う面の数に等しい．」のところであった．さっそく生徒たちにポリドロンを配付し正六面体を作って考察するよう指示した．するとここで生徒たちの反応が変わってきた．さきほどまでよくわか

らないと言っていた生徒が指を使って正六面体の中にできる図形の辺の部分を作ったりしていた．しかしポリドロンの中に線(辺)をひくことはできない．そこで<立体カブリ>で確認してみることにし，「正多面体の双対」の話をした。



▲図14　正六面体の中にできる正八面体
正六面体の面の数と正八面体の頂点の数の確認

以下，この段階での生徒の感想である。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

・コンピュータの方は、いろいな角度から見ることができるので各面の中心や各辺の中点を結んだ立体がどんな面の形でできているかということがとてもよく分かった。(多)

・言葉や文字で教わるよりも実物を見ながら教わる方がわかりやすかった。

・今回のような問題だと、ポリドロンだけだと作った図形にさらにイメージを加える必要があるけど、コンピュータだとそのイメージを可視化されているのでわかりやすかった。問題によって考え方を工夫するとより深く掘り下げられるんだなと思った。

・線とかも出てくるので、ＰＣの方がわかりやすい。サイズ感もわかる。

・ＰＣの方がわかりやすい。ポリドロンは自分で想像しなければならない。

・コンピュータの方は、いろいな角度から見ることができるので各面の中心や各辺の中点を結んだ立体がどんな面の形でできているかということがとてもよく分かった。

・コンピュータの方がより空間の想像が広がった。黒板での説明だけではちょっと・・・ポリドロンはポリドロンで楽しめた。

・黒板の説明よりポリドロン、ポリドロンよりＰＣとだんだんわかっていきました。特にＰＣは元の図形も作った図形も見ることができてよい。

・教科書だけではイメージしにくいものをポリドロンとＰＣの両方で分かりやすく頭に入った。

・ポリドロンを使うことで実際の多面体を確認してこうなるかなと予想は立てられたが、ポリドロンには面が貼っていないため面の中心をつなげるのはできなかった。ＰＣはすでに答えが出ているので、始めからＰＣを見てしまっては勉強にならないと思っていたが、いろんな方向から見られて答えに納得できた。

・コンピュータで見ると、頭の中だけだとあまりうまくつながらなかった点と点が線でつながっていたので、イメージがとても簡単で、これを見ながらだと先生が最初にやった黒板での説明の意味がしっかりと分かったのでより理解が深まりました。

・ほとんど想像できなかったものがパソコンを使って容易に想像できた。家に帰ってさらに理解を深めたいです。

・ポリドロンの中に、シャーペンやボールペンを入れて考えたけど、うまく考えられなかった。パソコンは一発で分かった。

・自分で考えるのは難しくて、ポリドロンとＰＣはありがたかったです。今まではポリドロンの方がわかりやすかったけれど立体の中に立体を作るとなると、ポリドロンは自分で中の立体を想像しないといけないのでＰＣの方がわかりやすかったです。でもひとつの立体について調べたり、新しい立体を考えたりするのは、ポリドロンの方がよかったです。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

３．定期試験に具体物を用いて

３月に実施された年度最後の「後期期末試験」に，以下のような問題を出題した．「(１)立方体の辺上にある６つの点を結んでできる平面で、この立方体切り取ると、その切り口は、正六角形になるという。その６つの点を答えよ。(２)切り取って残った立体の展開図を描け.」(細かい解答方法については略)

そして、人数分の正六面体のポリドロンを用意し，「分解・展開不可」という条件でこの問題を考えさせた．立方体の切断は、中学１年の段階での既習であるが、正答者は(１)が３７名中１５名，(２)は(１)で正解した１５名中８名という結果だった．出題を最後の問題としたため，時間がなく手をつけられなかつたの

かもしれないが、無回答は１２名だった。

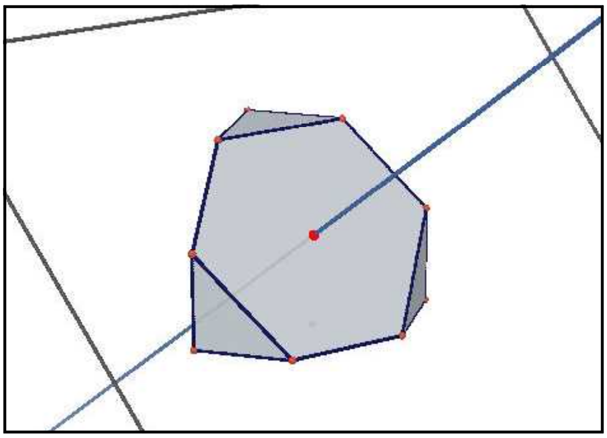
数日後の試験返却は教室でこの問題を含めた試験の各問題を解説した．特にこの問題は各自にポリドロンを配付し，自由に展開してもらって確認した．しかしこの段階でのアンケートでも１１名の生徒がイメージがわかないと回答していた．

▲図15　テスト返却でポリドロンを展開して確認

４．年度最後の授業にて

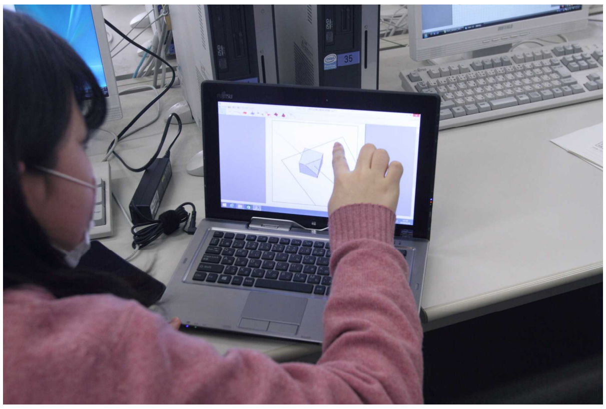
平成２７年３月１６日(月)の授業

この日が年度最後の授業であり最初からＰＣ教室で行った．まず用意していた<立体カブリ>のファイルを筆者がひとりで操作し，中央モニターに映して生徒たちに見せた．立方体に対角線を通し，その対角線に垂直な平面で立方体を切断して切断面が表示される形とした．



▲図16　<立体カブリ>での立方体の切断．対角線と垂直な平面を動かすことで、様々な切断面を見ることができる．

たちまち、生徒たちから「俺もやりてぇ！！」などの声があがった．さっそくファイルを生徒たちに配付し操作してもらった．



▲図17　<立体カブリ>を指で操作して

またこのとき，タッチパネル式のＰＣを用いて、<立体カブリ>を指で動かしてもらうことも行った．

この段階での感想である。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

・すごい！！本当に正六角形になるということが分かりました。

・貴重な経験をした。

・理解できてはいたが、切った面がどのように移り変わるのかがよく分かりました。

・どこをどう切れば、正六角形になるのかがわかった。

・とてもイメージがわいてわかりやすかったです。手で動かして少しずつかけていくのが、動かしていておもしろかったです。意味がよく分かりました。

・これほんとにすごい。小学生、中学生のときからの疑問が解決しました。三角形や六角形になるんですね。はじめてビジュアルで理解しました。

・角度を変えて断面図が見れて良かった。

・辺の中点で切った断面図だけでなく、どのあたりでどう切るとどんな断面図になるかがとてもよくわかった。さらにそれをいろんな角度から見ることができるのがすごい。

・テストではポリドロンを使わなくてもある程度イメージできたが、ポリドロンを使うことにより、コンピュータを使うことでさらに理解が深まった。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

また、年度最後の授業の感想としては

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

・ポリドロンを使ったりＰＣを使ったりしてイメージが湧き，わかりやすかったです．(多数)

・図形のしくみなど，いろいろ動かして自分の手や頭で感じることで，いろんな視点から発見できるように

なった．
・図形のおもしろさを知った．なんかすごい．
・ビジュアルで理解できたのはすごい．自分で作ってみようとか、見方をかえてみようと思えるようになりました．
・来年度の授業でも立体が出てきたらこのイメージは生かせると思う．
・教科書だけでは絶対無理なことをたくさん学べた．
・立体的に図形を見ることができ，少しですが図形がおもしろくなりました．机上では出てこない考えができたのはうれしかった．
・普通の授業では模型とかないから、この問題はこのパターンと覚えるしかなかったと思います．作る作業も楽しかったし、なんといっても発見がありました
・確実に想像力が身についたと思います．
・ポリドロン、楽しかった。ＰＣもよかった。
・ＰＣとポリドロンで、想像力がかなりついたと思う。図形を頭の中で想像しやすくなった。
・実際に手を動かして作ったポリドロンが楽しかった。作ってから教科書を見るとなるほどと思った。
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

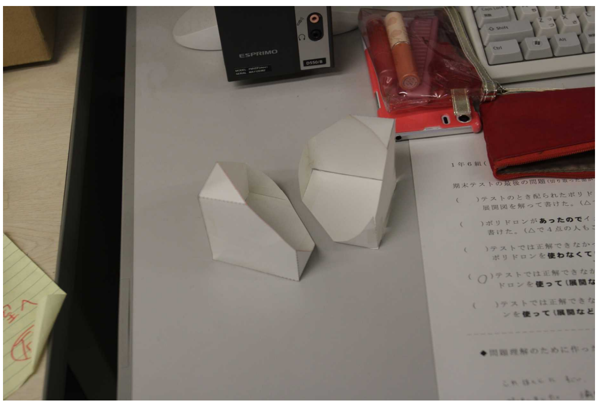
５．特筆したい二人の生徒

ここで特筆したい二人の生徒のことを記しておく．いずれも最後の授業のときのことであった．

<ひとりめ>

まず女子生徒であるが、「後期期末試験」に出題した立方体の切断の問題を実際に模型で作ってきた生徒がいた。正多面体の展開図に関しては正多面体に入ってすぐに配付しておいた．しかしその展開図は今回の「後期期末試験」で出題したものとは違うものである。

彼女は配付された展開図を使って立方体を作成し、



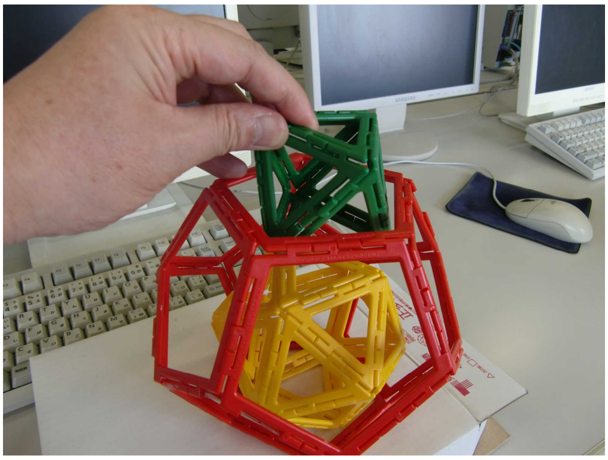
▲図18　展開図を用いて実際に切断の模型を作成

それを上手に切断して持ってきてくれた．

「何か気づいたことはある？」と問いかけると、「このふたつ同じものだよ」という。「と、いうことは？」というと、「そうか、対角線の真ん中なんだ．」ということに気づいてくれた．切り取る状態においては，各辺の中点をとっていくのだから、最終的にその面の位置は対角線の中点ということになるわけだが、こうやって実際にやって確かめるということは多くの確認を伴う．筆者もまさか、具体物を作ってくる生徒が現れるとは予想さえもしなかった．「何で作る気になったの？」と問うと「ポリドロンを切るわけに行かないし，でも切ったらどんな感じになるのかやってみたかった．」と答えた．

<ふたりめ>

こちらは男子生徒であるが、感想の欄に「正八面体を，先生が以前出した真上から見た形にすると，正十二面体の面をすり抜けられる．」と記述していた．
ポリドロンを自由に操作させると生徒たちは，ポリドロンの中にポリドロンを入れるという操作を始める．

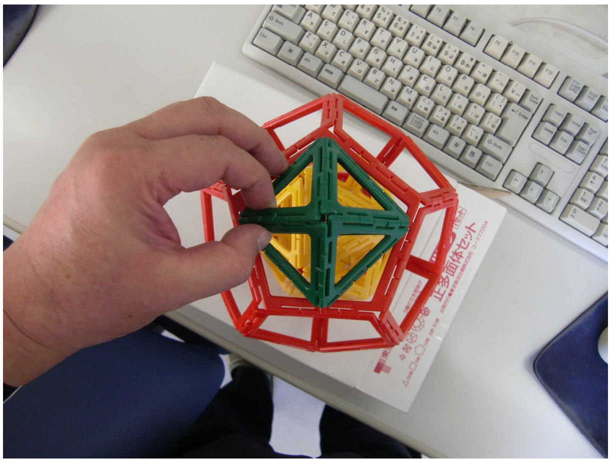


▲図19　生徒が記述したとおりに通過させる

まさに黒板とチョークだけの授業ではありえないことである．その中でポリドロンを分解して中に入れるのではなく，ひとつの正多面体を，別の正多面体のひとつの面に「すり抜けさせられるか」ということを，特に数学として考えるのではなく「おもしろいからやってみよう」という気持ちで生徒たちは始める．すると「知恵の輪」のごとく通過させる向きによって入ったり入らなかったりする。その生徒は，例の前述の東京大学の入試問題を覚えていて，このことを記述したわけである．後日その理由を考えてみるよう指示した．

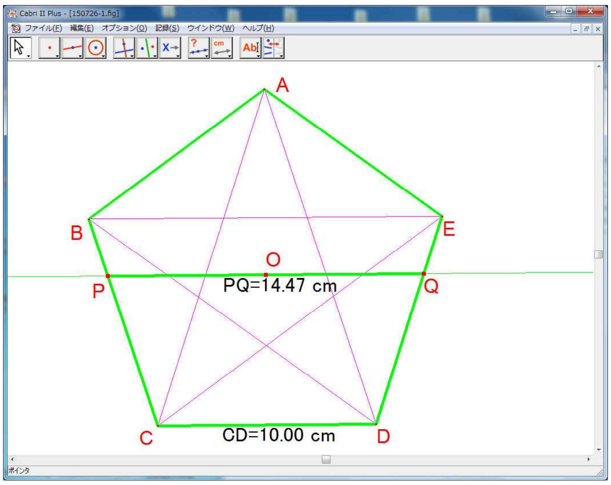
しかしここで驚いたことが起こってしまう．以下，すべて一辺の長さを a とすると正八面体の対角線の長

さは$\sqrt{2}\,a$．一方，正十二面体のひとつの面，正五角形の一つの頂点から対辺までの長さは，内接円の半径と外接円の半径の和なので，$\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{5}+\frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{5}\right)a$，すなわち約1.53aとなって$\sqrt{2}\,a$よりも大きく，例の「一辺の面を下」に置かなくても正八面体の「縦」の部分は，演繹的に考えて「本当は」通ることがわかる．



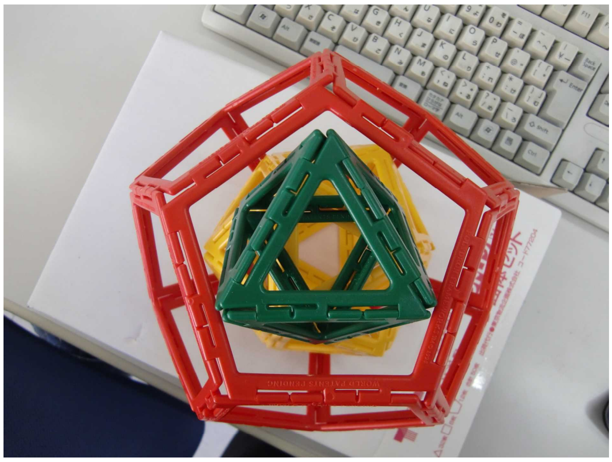
▲図20 正八面体 この向きで通過できる？ できない？

そしてもうひとつ，正八面体の「横」の長さについて考察してみた，要は正五角形の一番上の頂点をＡとして，反時計まわりにＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅとしたとき，中心のＯ（オー）を通って辺ＣＤに平行な直線を引いたとき，辺ＢＣとの交点をＰ，辺ＤＥとの交点をＱとした場合のＰＱの長さが$\sqrt{2}\,a$よりも大きくなるのかということである．こちらも生徒への説明には多少の難しさを感じ，まず最初に演繹的に考えずにいわゆる＜平面カブリ＞で見せて確かめてみることにした．さっと正五角形を作図し，中心のＯ（オー）を通って辺ＣＤに平行な直線を引き，辺ＢＣとの交点をＰ，辺ＤＥとの交点をＱとした．そして＜平面カブリ＞の持つ「長さ計測」を利用した．辺ＣＤの長さを１０．００ｃｍとし，辺ＰＱの長さを見てみると１４．４７ｃｍとなっていて一辺の$\sqrt{2}$倍以上になっていることを確認した．演繹的に考察しても$\left(1+\cot\frac{\pi}{5}\times\tan\frac{\pi}{10}\right)a$であり，数値が約1.447$a$となることで最終的に，図20のような置き方をしても縦も横も$\sqrt{2}\,a$以上で，実際には通過できることを確認した．



▲図21 正八面体の横の部分が入るか確認

また最後に，ひとつの面を下にしておいた正八角形を上から見た図の「正六角形」の「対角線」の長さは$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$であり，数値にして約1.15aとなるのでこれは余裕をもって通ることになる．例の＜立体カブリ＞で確認しても確かにそうなることが判明した．



▲図22 正八面体の「正六角形」の通過

ギリギリのところで通過したりしなかったりと，もちろんポリドロンの「辺」の部分の「厚み」が微妙に関係していたわけである．しかし，彼にとっても，また筆者自身にとってもそれは意外な発見であり，単に「通過できない」で終わらせずに演繹的な考察を深めたのはとても意義あることだと感じた．

６．今回の発表のまとめとして

2012年度は，具体物として「おりがみ」を中心に用いた．2013年度は，「おりがみ」のみならず竹ひごなどを使って平行六面体を作ったりした．また昨年度，2014年度は，ｘｙｚ軸の立体模型を「具体物」として各自で作成し，コンピュータの画面と比較して見てもらったりした．そして今年は「具体物」として「ポリドロン」を用いた．いずれの場合も生徒たちは「数学を手で触る楽しさ」を得ていたと考える．そして以前

にもこの冊子に記述したが「触ったものの反応がある」ということは人間本来が持つ楽しみのひとつであろう．紙面の都合もあり今回もまた，ひたすら実践記録を載せる形となってしまった．そして，生徒たちの顔の表情の写真を載せることはできないが，後ろ姿からも，その楽しそうな雰囲気を読み取っていただけば幸いである．さて，今回筆者は，本冊子の冒頭のところで「０．発表のコンセプト」を記した．よく「教師は担当クラス(生徒)を選べるが，生徒は教師を選ぶことはできない.」と言われる．だからこそ，我々教員は与えられた担当クラスで全力を尽くさねばならないと考える．それは特に高校教師にあっては，「生徒を希望する大学に合格させる.」ことに重きを置かれることが多い．しかし，問題解説も重要な授業の一部ではあるものの，前述の東大の入試問題にもあるように，基本に戻って「数学的な見方や考え方」の育成というものがまず基本にあると考える．そしてそのための「数学的活動」であり，だからこそ，高等学校数学科の「目標」の冒頭にこの言葉があるのだと考える．　再度ここに「０．発表のコンセプト」を記す．

先生方、いつもの数学の授業からちょっとだけ脱却し，おおいに「数学的活動」を取り入れ、生徒たちに、数学そのものの持つ「面白さ」「美しさ」「不思議さ」を味わわせてみませんか。

参考文献

◆文部科学省(2009),「高等学校学習指導要領解説　数学編」，文部科学省ホームページでのPDFファイル

◆垣花京子(2007)，「ITの活用で数学教育は変わるか？～動的図形学習ソフトCabri-Geometryの実践研究から～」科学教育研究 31(1)，日本科学教育学会

◆吉田明史(2009),「高等学校の数学教育に求められるもの」．日本数学教育学会誌．第91巻 第7号

◆清宮俊雄(2001)，「初等幾何のたのしみ」，日本評論社

◆前田正男・池田敏和・藤原大樹・鈴木誠・橋本吉貴・小山直人・石谷優行・小原美枝・馬場裕・橋本吉彦(2010)，「中・高等学校数学科における図形についての美しさを感得する教材開発」．横浜国立大学教育人間科学部紀要Ｉ(教育科学)No.12　pp.135-154

◆池田敏和・馬場裕・橋本吉彦・岩立　忠・藤原大樹・石谷優行・橋本吉貴・峰野宏祐・東谷洵・五十嵐潤・前田正男(2011)，「算数・数学科における図形についての美しさを感得させる教材開発とその指導」．横浜国立大学教育人間科学部紀要Ｉ(教育科学)No.13　pp.17-39

◆石谷優行(2011)，「高等学校図形領域授業にテクノロジーを用いる際の一考察(Ⅱ)～アナログ的数学的活動の重視に焦点をあてて～」第44回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，pp.453-458

◆石谷優行(2010)，「高等学校図形領域授業にテクノロジーを用いる際の一考察～機器と現物，手を使うことによる実践～」第43回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，pp.169-174

◆石谷優行(2000)，「高等学校の授業における『知的活動の教具』としてのコンピュータ活用に関する研究～質的研究法によるエスノグラフィー的分析～」横浜国立大学大学院教育学研究科 修士論文

謝辞

本授業実践には多くのポリドロンを必要とし，その多くのポリドロンを快く貸してくださった横浜国立大学　両角達男先生に心より感謝申し上げます。ありがとうございました。

本研究は，平成13･22･23･24･27年度 独立行政法人日本学術振興会による科学研究費補助金(奨励研究)，課題研究番号(順に) 13913012･22909005･23909003･24909003･15H00152の研究助成を受けて進められている.

もったいなくも，昨年，平成26年7月31日(木)，(公益社団法人)日本数学教育学会より「全国大会優秀研究賞」を受賞させていただきました.横浜国立大学の先生方をはじめ，お世話になったすべての皆様にこの場を借りて暑く御礼申し上げます。また，私のつたない発表をご清聴いただいた多くの皆様に心より感謝申し上げます.ありがとうございました.

（これまでの「当日配付資料」は
http://www.ishitani.comのトップページから
たどってください．全て読むことができます．）

E-Mail masayuki@ishitani.com
Webサイト http://www.ishitani.com

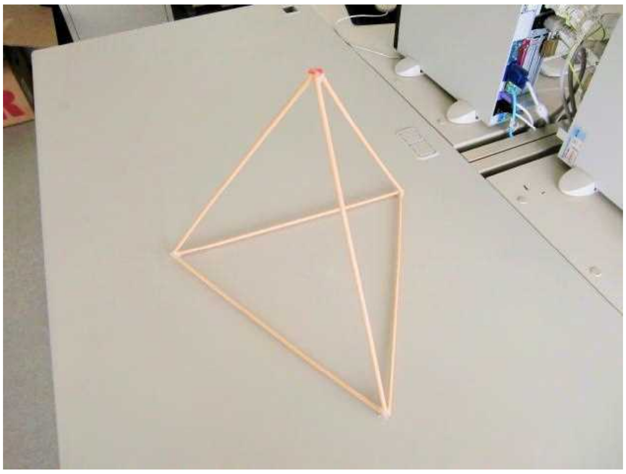
おまけ！！　実はこのページは一昨年の山梨大会，そして昨年の鳥取大会の際も，最後に「おまけ！！」として付けたものである．今回もページ数の関係から，本ページを白紙にしてしまうのももったいないので「具体物を使った」「なかなかの実践報告」としてぜひ紹介したい．

それは，2012年度の冬（2013年2月），ある日の放課後のことだった．そのとき数学Ｂを教えていた生徒が次のような問題で悩んでいた．

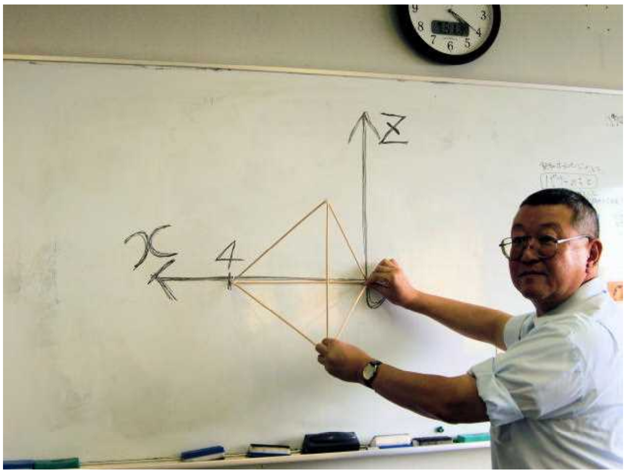
正四面体ＯＡＢＣがある．Ｏ(0,0,0)とＡ(4,0,0)として辺ＢＣがｘｙ平面(x>0,y>0)と垂直に交わっているとき，点Ｂ，点Ｃの座標を求めよ．

彼女は放課後，私を探したらしいのだが会議か何かでうまく探せず１年生のときに数学を教わっていた先生にこの質問をしたそうである．しかし，その先生から一生懸命紙面の上で説明を受けたものの，彼女が納得のいく解答を得ることはできなかったということである．ようやく翌日，私を見つけ質問を受けた．そしていつも授業中に使っているやや太い竹ひごで作った正四面体を取り出した．そしてｘ，ｚ軸座標を描き，右の写真ように正四面体を置いてみた．なんとこれだけで彼女の顔が見るみるうちに笑顔になり，「先生，わかった！！」の声が発せられた．数分して点Ｂが$(2,2\sqrt{2},2)$であり点Ｃが$(2,2\sqrt{2},-2)$であると計算で出した彼女は絵顔そのものであった．もちろん１年生のときに数学を教わっていた先生の説明が土台にはなっているのだろうが，私がほとんど充分な説明をしていないのにもかかわらず，彼女自身で簡単な三平方の定理を使って答を出せたことに，とても満足していたわけである．「ちょっとだけでいいから，この感激を文章にしてみてよ．」と書いてもらったのが以下である．

あたしの質問にとてもわかりやすく丁寧に答えてくれてありがとうございました．他の先生にも，同じ質問をしたときは，紙に立体の絵を描いて必死に教えてくれたけど，まずその立体が思い浮かばないのに計算方法まで，ばーーーっと話されて何も理解できませんでした．放課後だったのでその先生もあたしも時間がなかったからかもしれないけれどその日はすっきりせずに終わりました．石谷先生に説明されたときはびっくりするくらい頭の中に立体の中の必要



▲やや太い竹ひごで作った正四面体



▲座標を書いてこう置いただけ（もちろん再現です．）

な部分の図形が浮かんできて，計算方法も先生に説明されなくても「あれを使えばいいんだ」ってすぐ解ったし，立体を現物で見るだけでこんなにも見えてくるものがあるんだと驚きました．紙の上だけで立体の問題をやると難しくてつまんないと思っていたけど，同じ問題でも立体を見ながらやるとパズル？？みたいな感じですごく楽しく解けたし，すっきりしました．１回この問題を解いただけでも他の問題の時に形を想像しやすくなりました．本当にありがとうございました．

「ちょっとだけ」でいいのに，こんなに書いてもらえた．ここで，論理的なことを書き始めるよりも・・

やはり，こういう瞬間が「教師やっててほんとにうれしい一瞬」なのである．こういう瞬間を多く迎えるために，常日頃から自分自身，いろいろなことに興味を持ち，そしていろいろな説明のやり方について考え続けていきたいと強く思った瞬間でもあった．ほんと，生徒に感謝です．m(_ _)m

あ，もちろん3D-GRAPESで後で表示してみました．