

## コンピュータ等(iPad, iPodも含め)を活用した図形領域授業の実践 ～数学Bベクトルに焦点をあてて～

神奈川県立横浜平沼高等学校 石谷優行

### 1. 発表にあたって

昨年度(2009年度)は京都にて、「重心 その面白さ 美しさ～特に凹四角形の具体物(ブーメラン)を用いて～」と題した発表を行った。数学Aの三角形の重心の授業を発展させ、凹四角形の重心を「GRAPES」や「CABRI GEOMETRY II plus」といった動的作図ツール(Dynamic Geometry Software:DGS)を授業で用いて思考していく実践授業の発表であった。さて数学教員が教科「情報」の担当者となり数学を十分に持てないケースが多く筆者もそのひとりであるが、本年度数年ぶりに数学Bを担当する機会を得た。本稿タイトルの「図形領域」という言葉を前述の平面図形の分野のみならず、今回数学Bのベクトルの授業に焦点を当て図形的な考えを盛り込みながらコンピュータ等を用いて授業を行ってみた。特にベクトル方程式とそれを表現した図における直線や円などの軌跡の関連性を通して数学の「面白さ」「美しさ」を味わってもらいたい、ということが数年来の研究の原点となっている。

### 2. 今回の発表のポイント(研究の概要)

- ・ベクトルでのコンピュータ等活用授業へのお誘い
- ・コンピュータ等活用授業での注意点(生徒無反応)
- ・ベクトルの授業ならではの使える道具
- ・今後のベクトル授業の展開について
- ・ベクトルのみならず今後の

コンピュータ等活用授業について

生徒たちが一般的な「黒板とチョーク」によるベクトルの授業を経験したのち、実際にコンピュータ等を操作することにより、どのような授業展開がその授業において効果的なのかにまず焦点を当てる。尚、今回使用したコンピュータソフトは「ベクトル白板」「CABRI GEOMETRY II plus」「3D-GRAPES」「CABRI 3D V2」である。また、今回使用したハードは校内のコンピュータおよび「iPad」「iPod touch」そして図形(幾何)

操作が可能なカシオのグラフ電卓「fx-9860G II-N」である。最近発売された「iPad」そして「iPod touch」はマウスではなく画面を指で操作するものであり、数学教育に、これまでとは違った新しいテクノロジー活用の可能性を感じている。

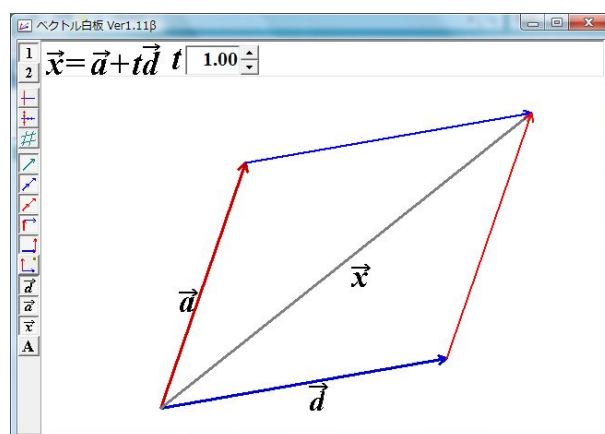
### 3. 授業実践から (2010年4月から7月まで)

#### (1)黒板とチョークによる授業

まず、通常どおり黒板とチョークにより授業を進めていく。「ベクトルとは何か」という話を通して興味を持たせていった。

#### (2)ソフト「ベクトル白板」による授業

ベクトルそのものに触れてみるという感覚は、それこそ黒板とチョークの授業では、味わうことができないことである。そこで「ベクトル白板」<sup>※1)</sup>というソフトを用いてベクトルそのものに触れてみる感覚を体験してもらった。マウスの右クリックでベクトルの始点や終点をクリックすると、マーク「□」が表示され、それをドラッグすると、あたかも自分でベクトルを操作している感覚が味わえるというわけである。



▲図01ベクトル白板の第一歩(tの値をいろいろ変化)

そして、ベクトル白板の第一歩とも言うべきtの値をいろいろと変化させ $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{d}$ を実感してもらった。この段階において生徒たちの感想が以下である。

- ・コンピュータを使うと変化が目に見えて面白かった。
- ・動いているのを見るのはとても楽しかった。
- ・自由自在にベクトルを動かして面白かった。
- ・黒板では見られない図で勉強できてわかりやすいし自分で想像つかないことがわかりやすかったです。
- ・とても楽しかったです。今までは平面で、味気のないものだったのですが、動いているようすを見ることでより頭に入ってきました。またやって欲しいです。
- ・自分で動かしてみると、仕組みがなんとなく分かった気がします。考えられるから楽しいです。
- ・直感的にベクトルをいじってmの値で、いろいろとベクトルが変わるのがおもしろい。
- ・黒板の図と違い、自ら作れるし、色々と興味が湧くので時間が速く感じた！
- ・今日の授業で実際にベクトルに触れて動かしてみると、ベクトルの足し算、引き算の意味がすごく分かった気がしました！とにかく楽しかったです♪
- ・数学を違う視点から見る事が出来ておもしろかったです。パソコンは苦手ですが、授業について行けて良かったです。

尚、やはり文面ではベクトル白板の動いている様子は伝えきれない。

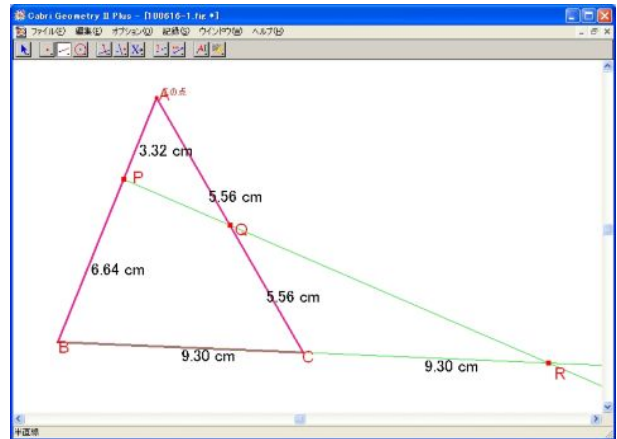
ぜひとも「<http://www.ishitani.com/vector1.htm>」を見ていただきたい。(動画アニメにしてあります。)

### (3) コンピュータ活用による生徒の無反応

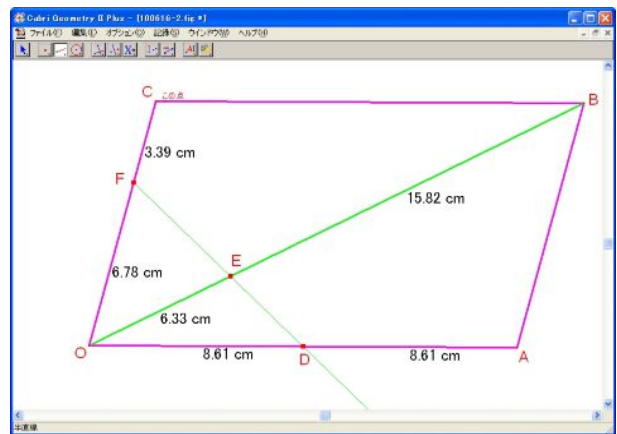
さて、このような感想のあと、黒板とチョークによる授業が続いた。数学Bは過去に担当したときもそうであるが、説明の時間がなかなかとれずに苦勞する。今回も同じである。そして6月のある日、以下の問題のところを解説していた。「 $\triangle ABC$ において、辺ABを1:2に内分する点をP、辺ACの中点をQ、辺BCを2:1に外分する点をRとする。このとき、3点P、Q、Rは一直線上にあることを証明せよ。」(高等学校数学B改訂版 啓林館(数B 025)P.76例題8)

普通どおり説明し、 $\overrightarrow{PR} = 4\overrightarrow{PQ}$ を黒板で解説してからカブリ<sup>\*2)</sup>により3点が一直線上を通ることを示した。また同様にその例題8の下に出ている問題「平行四辺形OABCにおいて、辺OAの中点をD、対角線OBを2:5に内分する点をE、辺OCを2:1に

内分する点をFとする。このとき、3点D、E、Fは一直線上にあることを証明せよ。」



▲図02 三点P、Q、Rが一直線上にならぶ様子



▲図03 三点D、E、Fが一直線上にならぶ様子

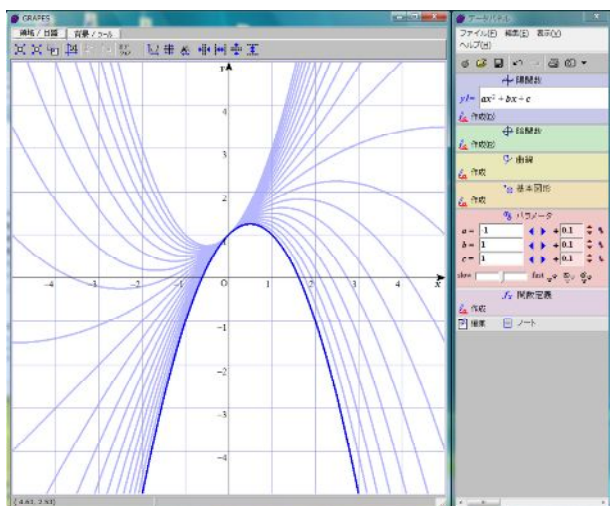
この問題も、生徒たちがある程度、正解を得られたところでプロジェクタを使ってカブリを映してみた。



▲図04 図03を教室の壁に映して解説している様子

しかし、ここで驚いたことが起こってしまう。生徒たち、誰ひとりとして驚きやびっくりの表情を表さなかったのである。教室は平然と静まりかえり私の説明を淡々と聞きたい。驚いていたのは教員の私ひとりだったのかもしれない。それは「三点が一直線上に並ぶ」という現象は教科書に書いてあり、この

授業の中では起こるべくして起こったわけであり、生徒たちにとっては珍しくもなんともなく、ただ普通の光景を筆者がコンピュータを使って示していたにすぎなかったのである。これまでも筆者は、様々な授業展開においてコンピュータを活用してきた。特に数学Iにおいて  $y=ax^2+bx+c$  の  $a$ 、 $b$ 、 $c$  のパラメータを変化させたときなどはいつも歓声がある。



▲図05 パラメータ  $a$  のみを1から-1へ変化

また、カレンダーの不思議としてどこかの一日を決める。するとその日を中心に(上+下)や(左+右)が同じであり、また斜めの合計も同じとなる。そしてそれは最初に決めた日の倍の数字である。さらにもうひとつのカレンダーの不思議として、例えば下のカレンダーであれば月曜日(の、どれか)と火曜日(の、どれか)を加えると必ず木曜日(の、どれか)になっている。

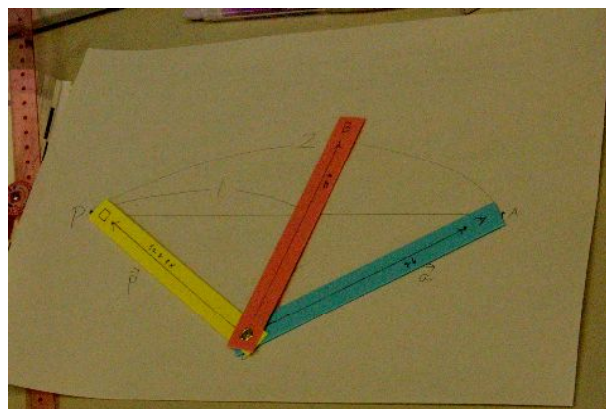
日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

こういう話をするとき、生徒たちは本当に不思議がって歓声を上げる。しかし今数学Bで扱っている「三点が一直線上に並ぶ」というそれこそ「まれ」な現象が起こっているにもかかわらずなぜ生徒たちは驚かないのか。それははじめから「成り立って当たり前」というものを授業で与えすぎていないだろうかということである。そして数学の問題の中には、それがすでに成り立つことが分かっているものを証明することが多い。しかし例えば三角形の重心をとってみても、三角

形をなるべく大きく描き、シャープペンの芯を非常に細いものとした場合には容易には三点は一致しないであろう。生徒たちには、様々なコンピュータ操作や現物のものを通して、偶然起こる不思議さや美しさを感じてもらいたい。そして先人たちがそれらを数学の式やグラフといったものに置き換えたすばらしさを感じるようになってもらいたいと願うものである。

#### (4)「現物」による生徒の反応の良さ

このあと、授業は「ベクトル方程式」に入っていっていった。ベクトル方程式の形  $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$  において、まず出てくるのが内分・外分である。内分・外分は位置ベクトルの最初のところで授業したものの、その定着度合いが心配になり生徒たちに実際に描かせてみた。その際、なんとかベクトル白板のようなものを現物で表すことができないかと考えてみた。思いついたのは英単語記憶カードであった。いわゆるベクトルの始点にあたるところが同じであって先(終点)が分かれるのである。もちろん、それぞれ伸び縮みしてくれれば良いがそれは無理にそうさせずに、彼らの頭の中で伸び縮みをさせようと考えた。さっそく柔らかいポリプロピレンの材質のものを三色買ってきてほしい同じ長さに切り、それらのほぼ始点の位置に「ハトメパンチ」で穴を開けてとめてみた。色の関しては同じように揃えて生徒数分作成した。生徒たちが名付けてくれた名前は、なんと「べくとるちゃん」である。



▲図06 ベクトルをイメージさせる「現物」

この「べくとるちゃん」であるが、生徒たちが意外なことに気づいてくれた。始点のところにちょうど穴が開いていることでここをシャープペンで押さえているいろと開き具合を考えていた。また当然ながらそのままの長さでは不都合であることに気づき、各自最終的に求めるベクトルの長さを考えながら記入していた。



▲図07 「現物」を使っての内分・外分の作図

さらに「ベクトルちゃん」であるが、そのサイズが幸いしたのか生徒たちがよくポケットに入れてくれたりしていた。休み時間、廊下で生徒たちにすれ違ったりした時に、生徒たちからいきなりこの「ベクトルちゃん」を示され「おお、この位置だと1:2に内分だ」とか「この位置だと2:1に外分だね」と言ったように不思議なコミュニケーションツールとなっていたことに作った自分自身が驚きであった。生徒たちが寄せてくれた感想の多くは「実際に触れるから良い」「触って考えられるから良い」というものが多かった。

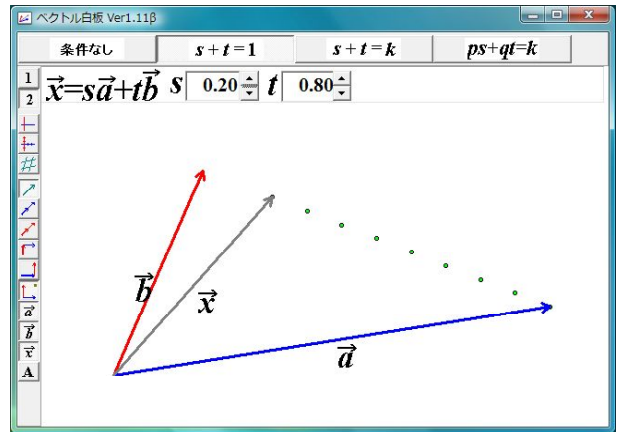
またもう一点、現物を使うということで、ふと良いと感じたものがある。それが清掃用の「ほうき」である。授業の場面としては話が前後してしまうが「法線ベクトル」の場面である。ほうきの枝を直線の方程式にみだてて説明をしていたときのことであるが、ふと手を下の方にやるとほうきの「掃く部分」のところ、枝と垂直についているのに気づいた。もちろん完全に垂直のままというわけではなく、いろいろと動かせるが生徒たちに垂直(法線)のイメージをつけるにはもってこいの教具であると感じた。



▲図08 法線ベクトルの説明も「現物」を使って

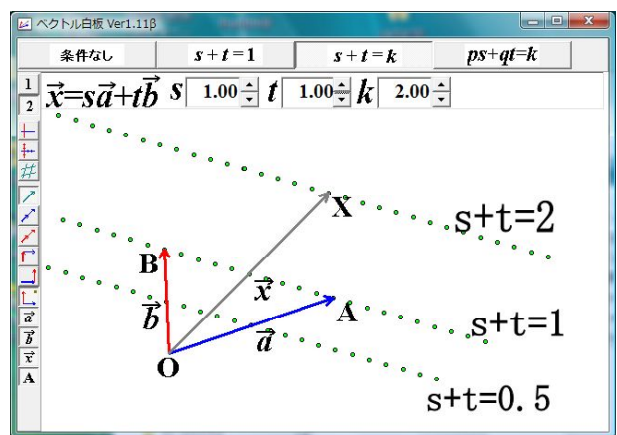
## (5)ふたたび「ベクトル白板」による授業

さてこの作図のあとは  $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$  すなわち、  
 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$  ただし  $s+t=1$  の  $t$  の値を変化させたときにどのような点の軌跡が表れるかということ「ベク



▲図09 t の値を変化させてみる

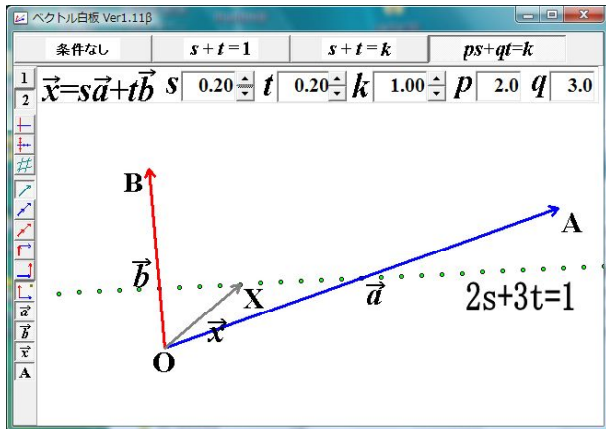
トル白板」を使って操作させてみた。  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の間に出てくることを確認し、また  $s$  や  $t$  の値のどちらかがマイナスになると  $\vec{a}$  や  $\vec{b}$  の「向こう側」に行くことも確認できた。この時点においては「帰納的な考え方」を中心に話を進めている。いかんせん本校の45分という短い授業時間の中ではゆっくりとした考察はできない。コンピュータ教室での操作は「帰納的な考え方」を中心に行い、次の授業は教室で行って黒板とチョークというスタイルの中、このコンピュータ教室で行ったことを土台として「演繹的な考え方」に活かしてもらいたいのである。さて、教科書ではさらに  $s+t=2$  や  $s+t=\frac{1}{2}$  という問題も提示されている。そこで「ベクトル白板」を用いてさらに考察を続けて行った。



▲図10 s+t の値を変化させてみた様子

この段階において生徒たちにとっては完全なゲーム感覚なのかもしれない。しかし、何人かの生徒たちは  $s+t=0.5$  のとき  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の間の点は4個。  $s+t=1$  のとき  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の間の点は9個。  $s+t=2$  のとき  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を2倍に延長すると、その間の点は19個ということに気づいていた。

さらに教科書では  $2s+3t=1$  の場合の問題もある。

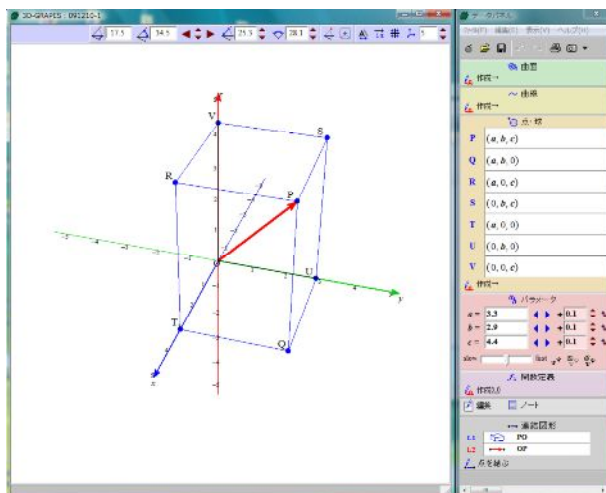


▲図11  $2s+3t=1$ として値を変化させてみた様子

これなどまさに  $2s+3t=1$  の2や3のパラメータが何を意味するのかを「感覚として馴染ませる」ことができるわけである。この授業の次の授業は前述したとおり黒板とチョークの授業の形をとった。教科書にあるように  $\vec{p} = 2s(\frac{\vec{a}}{2}) + 3t(\frac{\vec{b}}{3})$  で  $2s+3t=1$  より

$\frac{\vec{a}}{2}$  や  $\frac{\vec{b}}{3}$  という解説をしていくわけであるが、ダイレ

クトに右辺が1の場合を想定してsやtの前のパラメータを考えさせた方が早いと考えるは私だけであろうか。とりあえず7月までに行った授業はここまでであ



▲図12 3D-GRAPESによる簡単な空間ベクトル表示

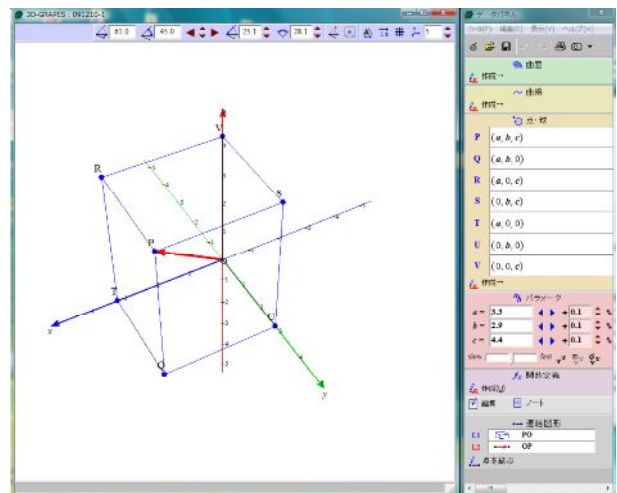
る。このあと夏休みが明けたあと、空間ベクトルに入るわけであるがそこでの活用に関して述べてみたい。

## 4. ベクトル授業の今後について

### (1) 3D(空間)用のソフトたち

空間のベクトルと言えば「3D-GRAPES」※3)であろう。

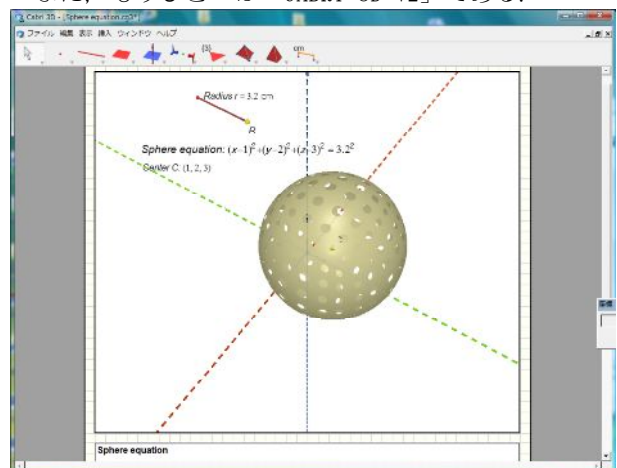
図12, 図13をご覧ください。マウスのみでひとつの空間ベクトルを様々な視点から見るができる。



▲図13 図12の視点を変えてみて。

もちろん紙面の都合で割愛したがx軸, y軸, z軸のそれぞれを中心にマウスを使って回したり, 図そのものを遠くから見たり接近して見たりということが可能である。なんといってもフリーソフトというところが作者の友田先生のすばらしいところである。

また、もうひとつは「CABRI 3D V2」である。



▲図14 サンプルの中にあつた中心と半径での球

こちらはもちろん有料であるが、様々な表面加工に優れていると感じている。詳しい説明は割愛する。

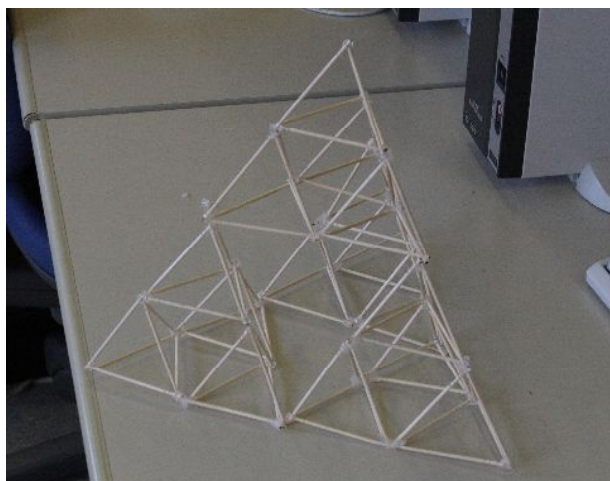
### (2) 3D(空間)でもぜひ現物を

この点も、まだ現時点では具体的なものを決めかね

ている状態ではあるが、空間ベクトルの授業においても、なんらかの現物(具体物)を用いて生徒たちに「触って」もらいたいと考えている。その一例としては、よく日用大工センターなどで売っている図15のグルーガンを用いて図16のように楊子をつなげて立体を作ったりができる。これなども生徒たちにとっては工作の授業のようでたいへん「乗り」が良い。Yogeometry<sup>※4)</sup>



▲図15 「グルー」を溶かして良く付くグルーガン



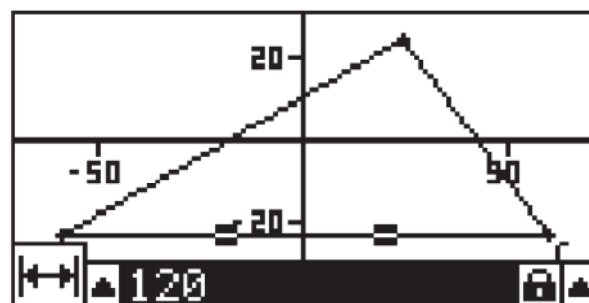
▲図16 グルーガンを用いて楊子をつなげた立体

## 5. 今後のコンピュータ等活用授業について

まずはじめにあげるのは、図形(幾何)操作が可能なカシオのグラフ電卓「fx-9860G II-N」である。

筆者は、カシオのグラフ電卓「CFX-9850GB PLUS」40台+教師用(プロジェクタ提示用のVI-9850Ga PLUS)1台を用いて過去7~8年間、様々な実践を行ってきた。「グラフ電卓」の「グラフ」としての使用のみならず単に関数電卓として例えば数学Ⅱの常用対数のところで必ず用いてきた。それは「1.234」「12.34」「123.4」「1234」「12340」のそれぞれの常用対数をとれば小数点以下がすべて同じになり整数部分のところ

規則的に変わる。また「小数第何位に初めて0でない数字が表れるか」もについても同様に操作してもらい帰納的な「気づき」から入って行って演繹的に「考察」するという授業スタイルをとってきた。今回ここで、同系列のグラフ電卓に図形(幾何)操作が可能なものが出たことは、筆者にとって今後の授業展開におおいに活かせるものと期待している。



▲図17 fx-9860G II-Nのマニュアルより



▲図18 本校生徒によるグラフ電卓の操作

そして次にあげるのが「iPad」や「iPod touch」である。以前より「iPod touch」や「iPhone」を生徒たちがよく持っている事は知っていた。また筆者には三人娘(大学3年・専門学校1年・高校1年)がいるが、上のふたりは「iPhone」、高1の娘は「iPod touch」を以前より持っていた。そして半年くらい前に、将棋やりバーシ(オセロ)ゲームで触らせてもらったところ「直接指で操作」することに、これまでにはない感覚と感動を強く覚えた。聞けばグラフ表示のソフトもあるという。さっそく諸々手配し、「iPad」を日本での発売当日に手に入れることができた。また同時に「iPod touch」もひとつ購入した。例のグラフのソフトは「Quick Graph」<sup>※5)</sup>といい無料のソフトであった。さっそくダウンロードして操作してみると関数はそれこ

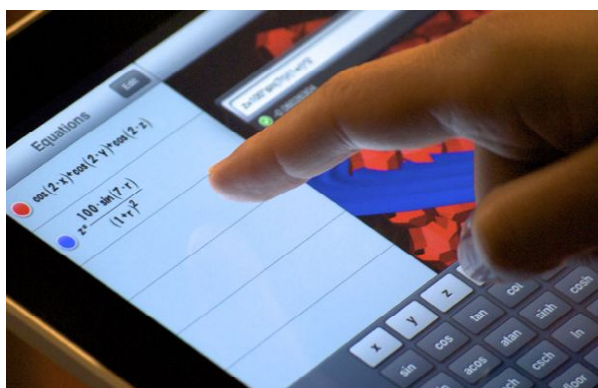
そほとんど用意されている。さっそく $y = \sin x$ を入れてみると綺麗に表示され、指でグラフを左右に送ったり、親指と人差し指を使って一部分を広げたりするとその部分がみごとに拡大される。そして何と言っても驚いたのは「三次元(3D)」にも対応していることである。3Dのサンプルをいくつか入力してみて、それを指を使ってグルグル回してみるおもしろさはなかなかである。さて、筆者がおおいに「iPad」や「iPod touch」に注目している点は、この「指による操作」も



▲図19 「iPad」でグラフを指で操作するおもしろさ



▲図20 「iPod touch」でも指で操作するおもしろさ



▲図21 指で入力(Quick Graphホームページより)



▲図22 3Dも指で(Quick Graphホームページより)

ひとつあるが、何と言っても、もうひとつは、生徒たちがすでにこれらのものを持っているケースがあるということである。その「持っている」というのも、いわゆる「電子辞書」以上に彼らの身近なツールになっているということである。その中へグラフツールが入って行けたらということは以前より考えていた。また、全般的にソフトが安いということもある。現時点においては、まだ「Quick Graph」しか触れてはいないが、今後ますます様々なソフトをダウンロードして授業に使える可能性を探っていきたい。また「iPad」や「iPod touch」を、Windowsの側がただ眺めているわけではない。最新の週刊アスキーによれば、既に「タッチ型デバイス」が続々と販売されはじめています。

## 6. 最後に

### (1) 数学の授業とは

数学の授業とはいったい何なのであるかということ、教科「情報」を多く担当するようになってから多く考えるようになった。教師が定理を証明し、例題を解説し、似たような問題を多く解いていく。いかに短時間で正解にたどり着けるかというスタイルが日本国中で行われている。演繹的な考え方を重視するこの形で生徒たちは「解けたときの喜び」を多く口にする。数学の目的は問題を解くことであろうか。という疑問を過去より常に持ってきた。新しい学習指導要領の高等学校数学科の目標<sup>※6)</sup>では、「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」とある。その当初にある「数学

的活動を通して」という言葉であるが、担当する教師によって、様々なアプローチがあるであろう。しかし、私自身、教科「情報」を担当していると生徒たちが生き生きとコンピュータに触れている様子を目にする。また彼らは暇さえあれば携帯に触れている様子も我々は多く目にする。携帯で何をやっているのかといえばゲームが多いのであろう。コンピュータ始め各種のテクノロジー機器は触ることで即座になんらかの反応を示す。その反応を彼らが数学を思考する道具として生かせないものだろうか日々考えている。

## (2)幾何に関してのすばらしさ

コンピュータは、その性格から式やグラフといったものの処理は得意としてきた。しかし、数学というか世の中を見渡してみると、幾何的なものに関しては「無条件に美しい」と感じるものが多くある。もちろん、美しいと感じるということに関しては「美しさを感じ得る力」も必要な場合もあろう。それらをテクノロジーを利用して生徒たちが活発的な探究活動をさらに推進していく原動力にならないものかと考える。

## (3)手(指)を使う大切さ・すばらしさ

これまでも筆者は、日数教はじめ様々なところで授業へのコンピュータ活用を発表してきたが、よく質問者から「すべての授業をコンピュータで行っているのですか？」と聞かれることがあった。もちろん答えはNoである。基本的なことではあるが、手(指)を使って内分・外分を書かせたり、三角形はじめ様々な図形を作図させることは、そのものの成り立ちを理解していく上で必要不可欠なことであろう。今後も様々な「コンピュータ等」を活用し、学習指導要領の目標の中にあつた「事象を数学的に考察」できる生徒の育成に努力していきたい。

-----  
筆者ホームページ(<http://www.ishitani.com>)ともども、御覧いただき、御意見等いただければ幸いです。よろしくお願いたします。

E-Mail [masayuki@ishitani.com](mailto:masayuki@ishitani.com)

## 引用文献や使用させていただいたソフト

### \*1)ベクトル白板

山梨県立韮崎高校(当時)の赤岡正毅先生が約12年ほど前に作られたソフト。赤岡先生からの依頼を受け石谷のホームページからダウンロードできるようにしてあります。<http://www.ishitani.com/vector1.htm>

### \*2)カブリの評価バージョン(30日間制限なし)

「<http://www.naoco.com/cabri/download/>」  
ただし、英語版です。

### \*3)3D-GRAPES

「<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/index.html>」(友田先生のページ)

### \*4)Yogeometry(ヨージ(楊子)オメトリー)

「<http://handson.exblog.jp/8467508/>」(ハンズオンマス研究会のページ 大野寛武先生)

### \*5)Quick Graph

「<http://kzlabs.me/iphone/quick-graph/>」

### \*6)新学習指導要領 高等学校数学科

「[http://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/new-cs/youryou/kou/kou.pdf](http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/kou/kou.pdf)」

## 参考文献

垣花京子(2007),「ITの活用で数学教育は変わるか? ~動的図形学習ソフトCabri-Geometryの実践研究から~」科学教育研究 31(1), pp.62-63日本科学教育学会

吉田明史(2009),「高等学校の数学教育に求められるもの」. 日本数学教育学会誌. 第91巻 第7号 p.19

前田正男・池田敏和・藤原大樹・鈴木誠・橋本吉貴・小山直人・石谷優行・小原美枝・馬場裕・橋本吉彦(2010),「中・高等学校数学科における図形についての美しさを感じ得る教材開発」. 横浜国立大学教育人間科学部紀要I(教育科学)No.12 pp.135-154

週刊アスキー2010年8月10日号(発売日7月27日),「みんな『指』で操作するのだ!!! タッチ型マシン全覧」 アスキーメディアワークス

尚、本研究は、平成20年度科学研究費補助金(基盤研究(C),研究課題番号20500749)及び平成22年度科学研究費補助金(奨励研究,研究課題番号22909005)の研究助成を受けて進められている。